Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Speckel

Sur la géométrie cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 268-276

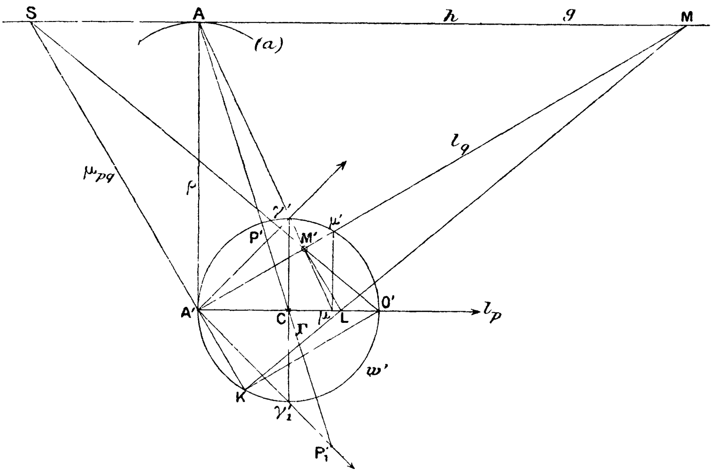
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__268_1>

SUR LA GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE;

PAR M. CH. SPECKEL,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Dans une Note insérée au Compte rendu de la dix-huitième session du Congrès pour l'avancement des Sciences, M. d'Ocagne a étudié les trajectoires des points marqués sur une droite qui se déplace en touchant constamment par l'un d'eux une courbe donnée. Dans son travail, M. d'Ocagne avait abordé directement la question; dans ce qui suit, je me suis proposé d'y appliquer les méthodes générales de la Géométrie cinématique et, en même temps, de compléter sur quelques points les résultats trouvés.

Soit donc g une droite qui se déplace en restant tangente par un de ses points A à une courbe donnée (a).



Nous pouvons concevoir que, par là, se trouve défini le système d'un plan σ. Nous nous proposons de trouver, pour chaque point du plan, le centre de courbure de sa trajectoire, ainsi que les points dont la trajectoire présente quelque particularité. Nous étudierons ensuite les relations de ces points entre eux.

I. *Centre de courbure de la trajectoire d'un point de* g. — Désignons par n la normale en A à la courbe (a). Elle touche en A' la développée (a') de la courbe A. Le point A' est le centre instantané de rotation à l'instant considéré. Le lieu des centres instantanés est la courbe (a'). Désignons par O' le centre de courbure de (a') pour le point A. D'après un théorème général sur les enveloppes, O' sera aussi le centre de courbure de la trajectoire du point à l'infini dans la direction perpendiculaire à n. Il suit de là donc que le point O' appartient à la *circonférence des centres* ϖ'.

Nous pouvons donc maintenant construire cette circonférence, puisqu'elle est tangente en A' à la droite n et qu'elle passe par O'. Sa connaissance entraîne celle du *cercle des inflexions,* qui lui est symétrique par rapport au point O. La détermination de la circonférence des inflexions suffit pour qu'on puisse immédiatement obtenir les centres de courbure des trajectoires. M. le général Dewulf a, en effet, donné la règle suivante qui s'applique à tous les cas :

Le lieu géométrique des centres de courbure M' *des trajectoires des points d'une courbe* F_m *est la projection horizontale de la courbe d'intersection de deux cônes : l'un de ces cônes a pour sommet le point* Σ *pris arbitrairement sur la verticale du centre instantané; l'autre a pour sommet ce centre instantané et pour base la projection de la courbe* F_m *sur le plan horizontal passant par* Σ.

La base du cône qui a son sommet en Σ *est le cercle des centres.*

Appliquons cette construction au cas particulier que nous considérons et nous pourrons énoncer la règle suivante :

1. *Joignez* A *par une droite au point* M *pris sur* g. *Cette droite coupe en* μ' *la circonférence des centres; projetez* μ' *sur le diamètre* $A'O'$ *en* μ; *la droite* μA *coupe* OM *au point* M'.

Je vais maintenant donner un autre mode de construction du point M′, fondé, lui aussi, sur des théorèmes généraux indépendants de ceux du général Dewulf.

Cette construction repose sur le théorème suivant :

Soient l_p et l_q deux droites passant par le centre instantané; B_p et B'_p un couple de points situé sur l_p, tels que B'_p soit le centre de courbure de la trajectoire de B_p; B_q, B'_q un couple de points analogues sur l_q. Les droites $B_p B_q$, $B'_p B'_q$ se couperont sur une droite fixe u_{pq}.

La position de u_{pq} se déduit de la proposition suivante :

L'angle de la tangente n à la courbe, base de la roulette, avec l_p est égal à celui que fait u_{pq} avec l_q.

Appliquons ces propriétés aux deux rayons

$$A'O' = l_p \qquad \text{et} \qquad A'M' = l_q.$$

La droite u_{pq} est alors perpendiculaire à A′M menée par A′.

Joignons M au point à l'infini sur l_p. La droite u_{pq} rencontrera cette droite de jonction en S sur la droite g. Nous énoncerons donc la règle suivante :

2. *Menez par* A′ *la droite* A′S *perpendiculaire sur* A′M. *Elle rencontre en* S *la droite* g. *Joignez* S *au point* O′ *par une droite, le point d'intersection de cette dernière et de* A′M *est le centre de courbure cherché.*

M. d'Ocagne avait été conduit à la construction suivante du centre de courbure :

Mener par O′ *une parallèle et par* A′ *une perpendiculaire à* A′M. *Ces droites se coupent en* K. *Joindre* K *au point* M. *Au point* L *d'intersection de* KM *avec* A′O′, *élever une perpendiculaire* LM′ *sur* A′M. *Le point* M′ *est le centre de courbure cherché.*

Il est aisé de voir que le point que l'on obtient ainsi coïncide avec celui qui a été fourni par les deux constructions précédentes.

II. *La conique de Rivals.* — C'est un théorème connu que, pour toute droite d'un système mobile qui ne passe pas par le centre instantané de rotation, le lieu des centres de courbure de ses points est une conique osculée au centre instantané par le cercle des centres.

On le vérifie ici en remarquant que les deux faisceaux qui, dans la construction n° 2, ont servi à déterminer le point M′, sont projectifs. Ils sont même en involution.

Cette construction nous donne également la tangente en O′, qui est O′A.

La droite qui joint le point A au milieu C de A′O′ est donc conjuguée des cordes de la direction A′O′.

Achevons la détermination de la conique. Pour cela, nous allons construire son centre en cherchant les points situés sur le diamètre AC. En ces points, la tangente à la conique est parallèle à A′O′. Comme, d'autre part, elle doit passer par le point d'intersection des traces horizontales d'un plan passant par la ligne de terre et d'un plan tangent au cône A, nous avons la construction qui suit : Menez le diamètre $\gamma C' \gamma'_1$ du cercle des centres qui est perpendiculaire sur A′O′. Les points P', P'_1 d'intersection de AC avec $A'\gamma'$, $A'\gamma'_1$ sont les extrémités d'un diamètre. Le centre est en Γ', milieu de $P'_1 P'$.

Nous reviendrons sur cette construction.

Déterminons la direction des axes. Pour cela, observons que, pour les points du système σ qui sont sur le cercle des inflexions, le rayon de courbure est à l'infini. Donc, en joignant le point A′ aux points où la droite g rencontre le cercle des inflexions, on aura la direction des rayons infinis : les bissectrices de l'angle de ces rayons donnent la direction des axes. On remarquera que la position de ces bissectrices est indépendante de celle de la droite g, pourvu qu'elle reste parallèle à elle-même, et que, par conséquent, les droites inclinées à 45° sur $A'O'$ nous donnent en toute hypothèse la direction des axes.

La conique, lieu des centres de courbure, a été désignée par le général Dewulf sous le nom de *conique de Rivals,* du nom du géomètre qui la remarqua le premier.

Nous dirons donc : *La conique de Rivals des points de la droite g est osculatrice en* A' *au cercle des centres et passe par le point* O', *où sa tangente est la droite* $O'A$. *Son centre est au point* Γ', *et ses axes sont inclinés à* 45° *sur la droite* $O'A'$. *L'espèce en est déterminée par la position de g relativement au cercle des inflexions.*

III. *Séries de points sur la conique de Rivals.* — Considérons le point S du plan σ comme un point dont nous cherchons le centre de courbure. Effectuons la construction n° 2; nous le trouverons en S'. Si le point M de g se déplace de façon que $A'M$ et $A'S$ restent toujours à angle droit, les faisceaux $A'(M\ldots)$, $A'(S\ldots)$ seront en involution; mais la conique de Rivals passant en A', les séries de points M' et S' situées dans cette conique seront aussi en involution. Donc, les cordes $S'M'$ passeront par un point fixe.

Nous pouvons considérer ce fait en considérant arbitrairement une involution de points sur la droite g. Soient M et S deux points conjugués de cette involution. Les faisceaux qui projettent les couples de points M et S en M' et S' sur la conique Rivals seront eux-mêmes en involution et, par contre, les cordes $M'S'$ passeront par un point fixe.

Donc : *Si* M *et* S *sont deux points conjugués d'une involution tracée sur la droite g, les cordes* S′M′ *passeront toutes par un même point.*

IV. *Variation des éléments de la conique de Rivals quand la droite g se déplace en restant parallèle à elle-même.* — La construction indiquée pour obtenir le point Γ' nous donne immédiatement le lieu de ce point. Effectivement, les droites $A'\gamma'$ et $A'\gamma'_1$ restent fixes, ainsi que le point C. Mais le point Γ' est le milieu de $P'P'_1$; donc, en vertu d'une propriété bien connue de l'hyperbole :

Le lieu des centres des coniques de Rivals est une hyperbole équilatère qui passe aux points C *et* A′, *et dont les asymptotes ont la direction commune des axes de toutes les coniques de Rivals.*

V. *Points à courbure stationnaire, points pour lesquels la trajectoire présente un point de rebroussement.* — Pour faire l'étude de ces points, nous calculerons l'expression du rayon de courbure. On peut, pour cela, faire usage, soit de la formule de Savary, soit opérer par un calcul direct en se servant d'une des constructions indiquées précédemment.

En posant

$$AA' = \rho \qquad \text{et} \qquad AM = h, \qquad O'A' = R,$$

on trouve

$$X = \frac{(h^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2 + \rho^2 + Rh}.$$

On reconnait au dénominateur le premier membre de l'équation du cercle des inflexions. C'est, en effet, le lieu des points qui passent par des *points d'inflexion* de leurs trajectoires.

Au numérateur, on a le premier membre de l'équation des droites isotropes issues de A'. Elles forment, en effet, le lieu des points qui passent par des *points de rebroussement* de leurs trajectoires.

On sait que le lieu des points qui ont un cercle de courbure stationnaire est une courbe de troisième degré qui passe par les points circulaires de l'infini et possède au point A' un point double dont les tangentes sont A'A et A'O. Pour obtenir l'équation de cette courbe, connaissant la relation qui lie R à ρ, il suffira de différentier l'expression de X par rapport à ρ et d'égaler cette différentielle à zéro.

Nous ferons ce calcul dans le cas où le point A décrit une développante de cercle. En négligeant le dénominateur, on a

$$\rho(h^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}(h^2+\rho^2+3Rh)=0,$$

abstraction faite du facteur $h^2+\rho^2$ dont nous connaissons la signification ; la cubique se décompose en une droite et en un cercle. Ce résultat était facile à prévoir, car, étant donnée la symétrie de la base de la roulette, la droite $\rho=0$ devait forcément faire partie du lieu, et dès lors il ne restait plus pour l'autre partie qu'un cercle tangent à A'A au point A.

Nous dirons donc :

Dans le cas où le déplacement du système est déterminé par le roulement sans glissement d'une droite sur un cercle, le lieu des points à courbure stationnaire se compose de la normale à la roulette au centre instantané, et d'un cercle tangent, en ce même point, à la roulette.

Dans ce même cas, il est facile de trouver les points qui passent par des *points d'ondulation* de leurs trajectoires, et le lieu de ces points pour toute la période du déplacement. Ce lieu est un cercle.

De même, les lieux des points qui, successivement, auront avec leur cercle osculateur un contact du *troisième* et du *quatrième ordre* sont des *cercles*.