Nouvelles annales de mathématiques

C.-A. Laisant

Constructions et formules relatives au triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 209-212

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__209_0>

CONSTRUCTIONS ET FORMULES RELATIVES AU TRIANGLE;

PAR M. C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences.

1. J'ai eu l'occasion de signaler déjà les deux propriétés suivantes, à plusieurs reprises; je me borne à les rappeler ici, laissant au lecteur le soin de la vérification :

1° Si l'on porte sur une droite indéfinie OX les trois longueurs OA, OB, OC égales aux côtés a, b, c d'un triangle, et si l'on trace par A, B, C trois droites formant avec OX des angles égaux aux demi-angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ du triangle, ces trois droites concourent en un point M; MP étant la perpendiculaire abaissée de M sur OX, on a

$$MP = r \text{ (rayon du cercle inscrit)}; \qquad OP = \frac{a+b+c}{2} = p,$$

et, par suite,

$$AP = p - a, \qquad BP = p - b, \qquad CP = p - c.$$

Les longueurs AM, BM, CM représentent les distances δ_a, δ_b, δ_c du centre du cercle inscrit aux trois sommets du triangle. L'aire du triangle considéré est double de celle du triangle rectangle OPM.

2° Si l'on porte de même sur une droite OX trois longueurs OA$'$, OB$'$, OC$'$ mesurées respectivement par les nombres a^2, b^2, c^2, carrés des côtés du triangle, et si l'on trace des droites par A$'$, B$'$, C$'$, formant avec OX des angles respectivement égaux à ceux du triangle, ces droites concourent en un point M$'$; M$'$P$'$ étant la perpendiculaire sur OX, OP′ est mesurée par

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=q^2,$$

P′M′ par 2S (S étant l'aire du triangle), A′M′, B′M′, C′M′ par *bc*, *ca*, *ab* respectivement ; OM′ a pour mesure

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2+4S^2.$$

Enfin l'angle M′OX $=\omega$ n'est autre que l'angle de Brocard, défini par la relation

$$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C.$$

2. Toutes ces propriétés sont des conséquences directes des équipollences

$$(1)\qquad a+\delta_a\,\varepsilon^{\frac{A}{2}}=b+\delta_b\,\varepsilon^{\frac{B}{2}}=c+\delta_c\,\varepsilon^{\frac{C}{2}}=p+ri,$$

$$(2)\qquad a^2+bc\,\varepsilon^{A}=b^2+ca\,\varepsilon^{B}=c^2+ab\,\varepsilon^{C}=q^2+2S\,i,$$

lesquelles pourraient se décomposer chacune en deux séries d'équations ordinaires, si l'on voulait séparer les parties imaginaires et les parties réelles.

De ces relations, il est possible de déduire aisément quelques conséquences intéressantes et dont quelques-unes n'ont peut-être pas été remarquées, bien qu'au fond elles ne soient pas nouvelles.

En élevant au carré la première formule (1), on a

$$a^2+2a\delta_a\varepsilon^{\frac{A}{2}}+\delta_a^2\,\varepsilon^{A}=p^2-r^2+2S\,i,$$

et, par soustraction de la première formule (2) qui est

$$a^2+bc\,\varepsilon^{A}=q^2+2S\,i,$$

$$2a\delta_a\varepsilon^{\frac{A}{2}}=(bc-\delta_a^2)\,\varepsilon^{A}+p^2-q^2-r^2,$$

$$2a\,\delta_a=(bc-\delta_a^2)\varepsilon^{\frac{A}{2}}+(p^2-q^2-r^2)\varepsilon^{-\frac{A}{2}}.$$

Cette équipollence conduit immédiatement aux trois identités

$$bc - \delta_a^2 = ca - \delta_b^2 = ab - \delta_c^2 = p^2 - q^2 - r^2 = \frac{abc}{p} = 4Rr,$$

en écrivant que la partie imaginaire du second membre s'annule; R est le rayon du cercle circonscrit.

En égalant les parties réelles, on trouve, au contraire,

$$\delta_a = \frac{bc}{p}\cos\frac{A}{2},$$

puis

$$\delta_b = \frac{ca}{p}\cos\frac{B}{2}, \qquad \delta_c = \frac{ab}{p}\cos\frac{C}{2},$$

ou encore

$$\delta_a = \frac{4Rr}{a}\cos\frac{A}{2}, \qquad \delta_b = \frac{4Rr}{b}\cos\frac{B}{2}, \qquad \delta_c = \frac{4Rr}{c}\cos\frac{C}{2}.$$

En appelant $A_1 B_1 C_1$ le triangle formé par les trois bissectrices des angles extérieurs du triangle donné, on reconnaît que ses côtés sont $a_1 = 4R\cos\frac{A}{2}$, ... Les formules précédentes peuvent donc s'écrire ainsi :

$$\frac{a\,\delta_a}{a_1} = \frac{b\,\delta_b}{b_1} = \frac{c\,\delta_c}{c_1} = r.$$

3. Si l'on élève à une puissance entière n la première équipollence (1), on a, en désignant par 1, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, 1, les coefficients du binôme

$$\begin{aligned} a^n &+ C_n^1 a^{n-1}\delta_a \varepsilon^{\frac{A}{2}} + C_n^2 a^{n-2}\delta_a^2 \varepsilon^{\frac{2A}{2}} + \dots + \delta_a^n \varepsilon^{\frac{nA}{2}} \\ &= p^n + C_n^1 p^{n-1} ri - C_n^2 p^{n-2} r^2 - C_n^3 p^{n-3} r^3 i + \dots + r^n i^n; \end{aligned}$$

et, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\begin{aligned} a^n &+ C_n^1 a^{n-1}\delta_a \cos\frac{A}{2} + C_n^2 a^{n-2}\delta_a^2 \cos A + \dots + \delta_a^n \cos\frac{nA}{2} \\ &= p^n - C_n^2 p^{n-2} r^2 + C_n^4 p^{n-4} r^4 - \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n^1 a^{n-1}\delta_a \sin\frac{A}{2} &+ C_n^2 a^{n-2}\delta_a^2 \sin A + \dots + \delta_a^n \sin\frac{nA}{2} \\ &= C_n^1 p^{n-1} r - C_n^3 p^{n-3} r^3 + C_n^5 p^{n-5} r^5 - \dots, \end{aligned}$$

plus deux autres formules analogues, dont les seconds membres seront identiques, en changeant les lettres a en b, puis en c.

Par exemple, en faisant $n = 3$,

$$a^3 + 3a^2\delta_a \cos\frac{A}{2} + 3a\delta_a^2 \cos A + \delta_a^3 \cos\frac{3A}{2} = p^3 - 3pr^2.$$

$$3a^2\delta_a \sin\frac{A}{2} + 3a\delta_a^2 \sin A + \delta_a^3 \sin\frac{3A}{2} = 3p^2 r - r^3.$$

4. En procédant de la même façon au moyen des équipollences (2) on trouverait deux séries de relations générales que nous n'écrivons pas pour abréger, et dont nous nous contentons d'indiquer l'application au cas de $n = 3$,

$$a^6 + 3a^4 bc \cos A + 3a^2 b^2 c^2 \cos 2A + b^3 c^3 \cos 3A = q^6 - 12q^2 s^2,$$
$$3a^4 bc \sin A + 3a^2 b^2 c^2 \sin 2A + b^3 c^3 \sin 3A = 6q^4 S - 8S^3.$$