NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Théorème sur les foyers d'une courbe quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 11 (1892), p. 163-167

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__163_1>

THÉORÈME SUR LES FOYERS D'UNE COURBE QUELCONQUE;

PAR M. E. AMIGUES.

1. Je me propose d'énoncer, avec plus de précision, un théorème connu sur les foyers d'une courbe quelconque (*A treatise on the higher plane curves*, by G. SALMON). Je donnerai aussi une démonstration plus simple de ce théorème :

Si, de chacun des n foyers réels d'une courbe de classe n, on mène à cette courbe U_n les $(n-2)$ tangentes non isotropes, on obtient un polygone de $(n-2)$ côtés. On peut toujours trouver une courbe U_{n-2} de classe $(n-2)$ tangente à tous les côtés de ce polygone. De même, cette courbe permet d'en construire une de classe $(n-4)$. Et ainsi de suite. Si l'on appelle P_i le produit des perpendiculaires abaissées des foyers réels de la courbe U_i sur une tangente quelconque à la courbe U_n, on a une relation linéaire entre les P_i.

Nous prendrons a et b comme coordonnées tangentielles de la droite dont l'équation ponctuelle est

$$y - ax - b = 0.$$

Soit $f(a, b)$ un polynôme de degré $(n-2)$. Soient x_i, y_i les coordonnées d'un des foyers réels de la courbe.

L'équation

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} (y_1 - a x_1 - b)(y_2 - a x_2 - b)\ldots \\ (y_n - a x_n - b) - (1 - a^2) f(a, b) = 0 \end{array} \right.$$

représente évidemment une courbe de classe n, ayant pour foyers les n points x_i, y_i, puisqu'elle admet les solutions

$$y_i - a x_i - b = 0,$$
$$a^2 + 1 = 0.$$

Si le polynôme f est arbitraire, l'équation (1) représente *toutes* les courbes de classe n ayant les points donnés pour foyers réels, vu que f contient le nombre de coefficients arbitraires qui est nécessaire.

Imaginons la courbe qui a pour équation

$$(2)\qquad f(a, b) = 0.$$

Si l'on désigne par U_n la courbe représentée par l'équation (1), l'équation (2) représente la courbe U_{n-2}. Car les tangentes menées des points x_i, y_i à la courbe U_n, abstraction faite des tangentes isotropes, sont données par les solutions du système

$$y_i - a x_i - b = 0.$$
$$f(a. b) = 0.$$

système qui donne aussi toutes les tangentes menées du point x_i, y_i à la courbe qui est représentée par l'équation

$$f(a, b) = 0.$$

Soient dès lors $(\alpha_1, \beta_1 (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_{n-2}, \beta_{n-2})$ les $(n - 2)$ foyers réels de cette nouvelle courbe. L'équation (2) pourra être remplacée par une équation analogue à (1), c'est-à-dire qu'on aura

$$f(a, b) \equiv \lambda_{n-2} [(\beta_1 - a\alpha_1 - b)(\beta_2 - a\alpha_2 - b) \ldots + (1 + a^2) \varphi(a, b)].$$

Continuant toujours de même, on aura pour équation de la courbe U_n

$$\prod_{i=1}^{=n}(y_i - a x_i - b) + \lambda_{n-2}(a^2+1)\prod_{i=1}^{i=n-2}(\beta_i - a\alpha_i - b)$$
$$+ \lambda_{n-4}(a^2+1)^2\prod_{i=1}^{i=n-4}(\delta_i - a\gamma_i - b) + \ldots = 0.$$

Divisant toute l'équation par $(a^2+1)^{\frac{n}{2}}$, on obtient pour équation tangentielle de la courbe U_n l'équation

$$(3) \qquad P_n + \lambda_{n-2}P_{n-2} + \lambda_{n-4}P_{n-4} + \ldots = 0,$$

qui est l'expression du théorème énoncé.

2. Nous remarquerons immédiatement que, si l'on connaît la courbe U_{n-2} et les n foyers réels de la courbe U_n, on aura les n tangentes menées à la courbe U_n de chacun de ses foyers. On aura donc n^2 tangentes, qui définissent la courbe U_n toutes les fois que $n > 2$.

Une remarque plus importante est la suivante. Si n est pair, il peut arriver que l'équation (3) contienne un terme indépendant. La courbe U_2 est alors une conique. Mais, comme plusieurs des coefficients λ peuvent être nuls, le dernier terme peut être P_{n-2h}. De même pour n impair, le terme P_1 peut ne pas entrer dans l'équation et le dernier terme peut être P_{n-2h}.

Supposons qu'il en soit ainsi, n étant pair ou impair. Alors la courbe U_{n-2h} se réduit à $n - 2h$ points, et ce sont ces points qui jouent le rôle de ses foyers réels.

Nous ferons encore une remarque relative au cas où l'équation (3) est binôme, c'est-à-dire de la forme

$$P_n + \lambda_{n-2h}P_{n-2h} = 0.$$

Dans une pareille courbe, le produit des distances des

n foyers réels à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances de $n - 2h$ points fixes à cette même tangente.

Ces courbes ont la propriété suivante : *Si l'on joint à un point quelconque* M *de la courbe les n foyers réels et le $(n - 2h)$ points fixes, la somme des cotangentes des angles que les premières droites font avec la tangente en* M *égale à la somme des cotangentes des angles que les secondes droites font avec la même tangente.*

Si, en particulier, n est pair et que $2h = n$, on a des courbes telles que le produit des distances de leurs n foyers réels à une tangente variable soit constant. Dans ces courbes, la somme des cotangentes des angles qu'une tangente faite avec les rayons vecteurs des points de contact est nulle.

Cette propriété relative aux angles de la tangente et des rayons vecteurs qui donne de suite l'équation différentielle d'une pareille courbe a été énoncée et démontrée pour les courbes de troisième classe dans l'Ouvrage de M. Salmon. Dans le cas général, la démonstration est la même.

3. Enfin, nous allons appliquer l'équation (1) à la démonstration d'un théorème très intéressant dû à M. Paul Serret (*Comptes rendus*, 1876).

La somme des angles que fait une droite fixe avec les n tangentes menées d'un point fixe à une courbe de classe n diffère d'un multiple de π de la somme des angles formés par cette même droite fixe avec les droites qui joignent ce même point fixe aux n foyers réels.

Prenons ce point fixe pour origine et la direction fixe pour axe des x.

Si l'on fait $b = 0$ dans l'équation (1), on obtient une équation en a qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes menées de l'origine. Si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les angles de Ox avec ces tangentes, ces racines sont $\operatorname{tang}\alpha_1, \operatorname{tang}\alpha_2, \ldots, \operatorname{tang}\alpha_n$.

Posons

$$n\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

On a dès lors

$$\operatorname{tang} n\lambda = \frac{\Sigma \operatorname{tang}\alpha_1 - \Sigma \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 \operatorname{tang}\alpha_3 + \ldots}{1 - \Sigma \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 + \Sigma \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 \operatorname{tang}\alpha_3 \operatorname{tang}\alpha_4 - \ldots}.$$

Ces diverses sommes seront données par l'équation en a, qui, si l'on pose

$$\frac{y_1}{x_1} = a_1 = \operatorname{tang}\beta_1, \qquad \frac{y_2}{x_2} = a_2 = \operatorname{tang}\beta_2, \qquad \ldots,$$

$$f(a, 0) \equiv A_0 a^{n-2} + A_1 a^{n-3} + \ldots + A_{n-2},$$

$$(-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n = \mu,$$

$$\Sigma_i = \Sigma a_1 a_2 \ldots a_i = \Sigma \operatorname{tang}\beta_1 \operatorname{tang}\beta_2 \ldots \operatorname{tang}\beta_i$$

devient

$$\begin{aligned}(\mu + A_0)a^n - (\mu\Sigma_1 - A_1)a^{n-1} + (\mu\Sigma_2 - A_2 + A_0)\\ \times a^{n-2} - (\mu\Sigma_3 - A_3 - A_1)a^{n-3}\\ + (\mu\Sigma_4 + A_4 + A_2)a^{n-4} - \ldots = 0.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\operatorname{tang} n\lambda = \frac{\dfrac{\mu\Sigma_1 - A_1}{\mu + A_0} - \dfrac{\mu\Sigma_3 - A_3 - A_1}{\mu + A_0} + \dfrac{\mu\Sigma_5 - A_5 - A_3}{\mu + A_0} - \ldots}{1 - \dfrac{\mu\Sigma_2 + A_2 + A_0}{\mu + A_0} + \dfrac{\mu\Sigma_4 + A_4 - A_2}{\mu + A_0} - \ldots},$$

c'est-à-dire en supprimant les termes qui se détruisent et en divisant haut et bas par $\dfrac{\mu}{\mu + A_0}$,

$$\operatorname{tang} n\lambda = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_3 + \Sigma_5 - \ldots}{1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \ldots},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} n\lambda = \operatorname{tang}(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n).$$