L. LECORNU

Sur les mouvements plans

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 5-17

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LES MOUVEMENTS PLANS;

PAR M. L. LECORNU,

Ingénieur des Mines, Docteur ès Sciences.

Lorsqu'on veut étudier analytiquement le mouvement d'une figure plane invariable qui se déplace sur un plan fixe, on considère à la fois deux axes rectangulaires liés à cette figure et deux axes rectangulaires immobiles dans le plan. En appelant alors ξ et η les coordonnées d'un point quelconque de la figure par rapport aux axes entraînés avec elle, x et y les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes, λ et μ celles de l'origine mobile, θ l'angle de l'axe des ξ avec celui des x, on a les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \lambda + \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, \\ y = \mu + \xi\sin\theta + \eta\cos\theta; \end{cases}$$

ξ et η sont des quantités indépendantes du temps, et λ, μ, θ sont des fonctions du temps. Il suffit de se donner ces dernières pour que le mouvement soit complètement déterminé.

Ajoutons l'une à l'autre les deux équations précédentes, après avoir multiplié la seconde par la quantité imaginaire i, et posons en outre

$$\begin{aligned} x + iy &= z, \\ \xi + i\eta &= \zeta, \\ \lambda + i\mu &= a, \\ \cos\theta + i\sin\theta &= b\,; \end{aligned}$$

il vient

$$z = a + b\zeta, \tag{2}$$

et cette équation unique peut, comme l'on sait, remplacer les deux premières. On a ainsi une relation entre les affixes z et ζ d'un même point rapporté successivement aux axes fixes et aux axes mobiles. a et b sont des fonctions du temps; en outre, le module de b est constant et égal à l'unité, de sorte qu'on peut écrire $b = e^{i\theta}$.

Je me propose ici d'appliquer l'équation (2) à l'examen de quelques questions concernant les mouvements plans. D'abord, la vitesse du point z est la grandeur géométrique représentée par la dérivée z', et l'on a

$$z' = a' + b'\zeta. \tag{3}$$

Cette vitesse est nulle pour le point C dont l'affixe ζ_c a pour valeur

$$\zeta_c = -\frac{a'}{b'}. \tag{4}$$

La valeur correspondante de z est

$$z_c = a + b\zeta_c = \frac{ab' - ba'}{b'}\,; \tag{5}$$

le point C est le centre instantané de rotation, ou *centre de vitesse*. Pour un autre point quelconque de la figure, on peut écrire

$$z' = b'(\zeta - \zeta_c) = \frac{b'}{b}(z - z_c) = i\theta'(z - z_c). \tag{6}$$

On voit ainsi qu'à un instant donné la vitesse de chaque point z est perpendiculaire à la ligne joignant ce point au centre instantané, et proportionnelle à la longueur de cette ligne. Autrement dit, il y a rotation élémentaire autour du centre, et la vitesse de rotation est égale à θ'.

Mais, dans le mouvement continu de la figure, le centre instantané se meut à la surface du plan fixe. Sa position au temps t étant déterminée par la valeur de z_c, la vitesse de son déplacement est donnée par z'_c. On tire de l'équation (5), en tenant compte de (4),

$$(7) \qquad z'_c = b\zeta'_c = \frac{b(a'b'' - a''b')}{(b')^2};$$

ζ'_c représente la vitesse du centre par rapport aux axes mobiles, comme z'_c représente la vitesse par rapport aux axes fixes. Le module de b étant égal à l'unité, ces deux vitesses sont égales; l'argument de b étant égal à θ, les deux vitesses ont même direction. Ces résultats se traduisent géométriquement en disant que la courbe, lieu du centre instantané par rapport aux axes mobiles, roule sans glisser sur la courbe, lieu du centre instantané par rapport aux axes fixes. Ces deux courbes sont appelées respectivement la *roulette* ou courbe roulante et la *base du roulement*.

Une courbe quelconque faisant partie de la figure mobile a une équation de la forme

$$(8) \qquad \zeta = f(u),$$

où u désigne un paramètre réel. La même courbe a pour équation, relativement aux axes fixes,

$$(9) \qquad z = a + bf(u).$$

L'élément dz de cette courbe est exprimé par

$$(10) \qquad dz = bf'(u)\,du.$$

Pour avoir l'enveloppe, il suffit de différentier l'équation (9) par rapport au temps t, en considérant u comme fonction de t, ce qui donne

$$a' + b'f(u) + bf'(u)u' = 0. \tag{11}$$

Entre les équations (9) et (11), éliminons $f(u)$. Il vient

$$z = \frac{ab' - a'b}{b'} - \frac{b^2}{b'}f'(u)u',$$

ou bien

$$z - z_c = -\frac{b^2}{b'}f'(u)u',$$

ou encore, en vertu de l'équation (10),

$$\frac{dz}{z - z_c} = -\frac{b'}{b}dt = -i\theta' dt.$$

Le second membre étant purement imaginaire, on voit qu'en chaque point de contact de la courbe avec son enveloppe, la tangente, qui a même direction que dz, est perpendiculaire à la droite $z - z_c$, propriété qui permet de construire ce point de contact.

L'accélération z'' d'un point quelconque est déterminée par l'équation

$$z'' = a'' + b''\zeta. \tag{12}$$

Elle s'annule pour le point J dont l'affixe ζ_j vérifie l'équation

$$a'' + b''\zeta_j = 0. \tag{13}$$

La valeur correspondante z_j de z est

$$z_j = a + b\zeta_j = \frac{ab'' - ba''}{b''}; \tag{14}$$

J est le *centre d'accélération*. Pour un autre point quelconque, on a

$$(15)\qquad z'' = b''(\zeta - \zeta_j) = \frac{b''}{b}(z - z_j) = [i\theta'' - (\theta')^2](z - z_j).$$

Il résulte de là que, pour un instant donné, l'accélération d'un point quelconque est proportionnelle à la distance r de ce point au centre d'accélération, et fait avec la ligne joignant les deux points un angle ayant pour tangente $\frac{\theta''}{(\theta')^2}$. La grandeur de l'accélération est

$$r\sqrt{(\theta'')^2 + (\theta')^4}.$$

L'accélération peut aussi s'exprimer en fonction de la vitesse. On a

$$(16)\qquad z'' = \frac{b''}{b'}(z' - z'_j) = \frac{\theta'' + i(\theta')^2}{\theta'}(z' - z'_j).$$

L'accélération est donc proportionnelle à la vitesse relative du point considéré par rapport au centre d'accélération, et fait avec elle un angle constant.

La combinaison des équations (5), (7) et (14) conduit à la suivante

$$(17)\qquad z'_c = \frac{b''}{b'}(z_j - z_c),$$

d'après laquelle la vitesse de déplacement du centre instantané forme, avec la ligne joignant ce point au centre d'accélération, un angle égal à l'argument de $\frac{b''}{b'}$.

Le lieu des points pour lesquels l'accélération est tangentielle s'obtient en écrivant que l'accélération a même direction que la vitesse, ou, ce qui revient au même, en égalant à zéro l'argument de $\frac{z''}{z'}$. On trouve ainsi

$$\arg.\frac{z - z_j}{z - z_c} + \arg.\frac{b''}{b'} = 0.$$

Cette expression exprime que le segment $z_j z_c$ est vu du point z sous un angle constant; le lieu est donc une circonférence passant par les points z_j et z_c : c'est la *circonférence des inflexions*. Si l'on suppose que z tende vers z_c, l'argument de $z - z_c$ a pour limite

$$\arg.(z_c - z_j) + \arg.\frac{b''}{b'},$$

ou bien

$$\pi + \arg.(z_j - z_c) + \arg.\frac{b''}{b'},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (11),

$$\pi + \arg.z'_c.$$

La circonférence des inflexions a donc pour tangente, au point z_c, la direction de z'_c.

Le lieu des points pour lesquels l'accélération est normale s'obtient de même en égalant à $\frac{\pi}{2}$ l'argument de $\frac{z''}{z'}$. On trouve encore une circonférence passant par les points z_c, z_j, et l'on constate que les deux circonférences se coupent orthogonalement.

La théorie des accélérations d'ordre quelconque s'établit avec la même facilité. Bornons-nous à dire que le centre des accélérations d'ordre n a pour affixe z_n la quantité $\frac{ab^{(n)} - ba^{(n)}}{b^{(n)}}$, et que l'accélération d'ordre n d'un point z quelconque est égale à $\frac{b^{(n)}}{b}(z - z_n)$.

Les résultats qui précèdent subsistent en grande partie quand la figure considérée se déplace en changeant de dimensions, mais en restant semblable à elle-même. Un pareil mouvement peut toujours être représenté par l'équation $z = a + b\zeta$, avec cette seule modification que le module de b devient différent de l'unité.

En effet, on voit d'abord que, si z et ζ sont les affixes de deux points différents d'un même plan, le lieu du point z est semblable à celui du point ζ, car la multiplication de ζ par b revient à faire varier dans un rapport donné le rayon vecteur issu de l'origine et à faire tourner ce rayon d'un angle donné, puis l'addition de a imprime à la figure un simple mouvement de translation. On voit en outre que toute figure semblable à la figure (ζ) peut être représentée par l'équation précédente, car on peut choisir a et b de telle façon qu'à deux points ζ_1 et ζ_2 de la figure initiale correspondent deux points arbitrairement choisis z_1 et z_2 de la seconde figure. L'équation $z = a + b\zeta$ est donc apte à représenter dans le plan toutes les figures semblables à une figure donnée, et il suffit de faire varier a et b en fonction du temps, en laissant ζ indépendant du temps, pour représenter tous les mouvements possibles d'une figure assujettie à rester semblable à elle-même.

Cela posé, il y a encore un centre de vitesse, défini par l'équation $z_c = \frac{ab' - ba'}{b'}$, et la vitesse d'un point quelconque z, proportionnelle à sa distance au centre, fait avec le rayon vecteur issu du centre un angle égal à l'argument de $\frac{b'}{b}$. Il y a également un centre d'accélération, une circonférence des inflexions, une circonférence des accélérations normales, etc.

Voici maintenant quelques exemples de problèmes faciles à traiter par l'emploi des variables imaginaires. Nous nous bornerons, pour simplifier, au cas d'une figure de grandeur invariable.

1. *Trouver les déplacements dans lesquels le mouvement de* J *est semblable à celui de* C.

En plaçant convenablement l'origine et appelant m

une constante, réelle ou imaginaire, on doit avoir

$$z_j = m z_c,$$

d'où

$$\frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'} = m \frac{b''}{b'}.$$

En intégrant et appelant K une nouvelle constante, il vient

$$ab' - ba' = \mathrm{K}(b')^m,$$

ou bien

$$z_c = \mathrm{K}(b')^{m-1}.$$

En faisant au besoin tourner l'axe des x et choisissant convenablement l'unité de temps, on peut rendre la constante K égale à l'unité. L'équation $z_c = (b')^{m-1}$ fait alors connaître la base du roulement. La courbe roulante est donnée par les deux équations

$$a + b\zeta_c = (b')^{m-1},$$
$$a' + b'\zeta_c = 0;$$

d'où, en éliminant a,

$$b\zeta'_c = (m-1)(b')^{m-2} b'',$$

et par suite

$$\zeta_c = (m-1)\int \frac{(b')^{m-2} b''}{b}\, dt = \frac{(b')^{m-1}}{b} + \int \frac{(b')^m\, dt}{b^2}.$$

L'argument de b reste arbitraire. Si l'on appelle ω la vitesse de rotation, cet argument est égal à ωt. Le module de b' est égal à ω, et comme on a les relations

$$z_j - z_c = (m-1) z_c = (m-1)(b')^{m-1},$$

on arrive à cette conséquence :

La vitesse de rotation est proportionnelle à la racine $(m-1)^{\text{ième}}$ *de la distance des deux centres* J *et* C.

Dans le cas où la vitesse de rotation est constante, la valeur de ζ_c peut être intégrée complètement, et l'on trouve

$$\zeta_c = \frac{m-1}{m-2}(i\omega)^{m-1} e^{(m-2)i\omega t};$$

on a d'ailleurs

$$z_c = (i\omega)^{m-1} e^{(m-1)i\omega t}.$$

Partant de là, soient p la partie réelle et iq la partie imaginaire de m, et soient A, B deux constantes qui dépendent de p, q, ω. Un calcul sans difficulté conduit, pour la courbe roulante et pour la base du roulement, rapportées, chacune dans le plan qui lui est lié, à des coordonnées polaires, aux deux équations

$$\rho = \mathrm{A}e^{\frac{q}{2-p}\theta},$$

$$\rho = \mathrm{B}e^{\frac{q}{1-p}\theta}.$$

Le mouvement est donc produit par le roulement d'une spirale logarithmique sur une autre. Les deux courbes ne peuvent devenir égales que si q est nul, mais alors elles se réduisent à deux circonférences.

Le cas où les deux centres coïncident rentre dans le précédent, en faisant $m = 1$. On voit immédiatement que z_c est alors constant, ainsi que ζ_c; le mouvement consiste dans une simple rotation autour d'un point fixe.

Si l'on veut simplement que le centre d'accélération reste fixe, on peut le prendre pour origine, ce qui revient à faire $m = 0$, et l'on trouve

$$z_c = \frac{1}{b'}.$$

Dans ce cas, la vitesse de rotation est inversement proportionnelle à la distance des deux centres. En outre, si θ désigne l'argument de b et φ celui de z_c, la somme $\theta + \varphi$ est constante, et la valeur de $\theta' + \varphi'$ est nulle.

Par suite, le rayon vecteur JC tourne en sens inverse du système mobile, avec une vitesse angulaire égale en valeur absolue. Quand cette vitesse angulaire ω est constante, le point C décrit autour du point J un cercle ayant pour rayon $\frac{1}{\omega}$. D'autre part, on a pour ζ_c l'expression

$$\zeta_c = \frac{1}{2i\omega} e^{-2i\omega t},$$

ce qui représente une circonférence ayant pour rayon $\frac{1}{2\omega}$. Le mouvement est donc celui d'une circonférence roulant sur une circonférence de rayon double. Il est clair qu'il s'agit ici d'un roulement intérieur.

2. *Trouver les déplacements tels que la ligne* JC *conserve une grandeur et une direction constantes.*

On doit alors poser $z_j - z_c = K$, ou bien, en tenant compte de l'équation (17), $\frac{b'}{b''} z'_c = K$. En intégrant, il vient

$$z_c = K \log b' + K_1.$$

La constante d'intégration K_1 peut être annulée par un changement d'origine. La constante K peut, comme précédemment, être rendue égale à l'unité. Nous écrirons donc $z_c = K \log b'$: c'est l'équation de la base du roulement.

Remplaçant z_c par sa valeur (5), nous avons

$$\frac{ab' - ba'}{b'} = \log b',$$

d'où, par une nouvelle intégration,

$$a = -b \int \frac{b' \log b'}{b^2} dt,$$

et, par suite,

$$a' = -b' \int \frac{b''}{bb'}\, dt.$$

On déduit de là la valeur de ζ_c

$$\zeta_c = -\frac{a'}{b'} = \int \frac{b''}{bb'}\, dt,$$

équation qui détermine la courbe roulante.

Quand on suppose la rotation uniforme, on a

$$z_c = \log(i\omega) + i\omega t$$

et

$$\zeta_c = \int \frac{-\omega^2 e^{i\omega t}}{i\omega e^{2i\omega t}}\, dt = -e^{-i\omega t}.$$

La base est alors une ligne droite, et la courbe roulante devient une circonférence.

3. *Trouver les déplacements tels que le centre d'accélération se meuve suivant une loi donnée.*

z_j est ici une fonction connue du temps. Pour déterminer z_c, on se servira de la formule (17), qui donne, par une intégration facile,

$$z_c = \frac{1}{b'} \int b'' z_j\, dt.$$

On a ensuite

$$ab' - ba' = b' z_c.$$

d'où

$$\frac{a}{b} = -\int \frac{b' z_c}{b^2}\, dt = -\int \frac{dt}{b^2} \int b'' z_j\, dt;$$

puis

$$a' = -b' \int \frac{dt}{b^2} \int b'' z_j\, dt - \frac{1}{b} \int b'' z_j\, dt,$$

$$\zeta_c = -\frac{a'}{b'} = \int \frac{dt}{b^2} \int b'' z_j\, dt + \frac{1}{bb'} \int b'' z_j\, dt;$$

l'argument de b reste arbitraire.

Supposons, par exemple, que z_j soit un polynôme en

t, $F(t)$, auquel cas J décrit une courbe unicursale, et que de plus la vitesse angulaire ω de rotation soit constante. Nous pouvons écrire

$$\int b'' z_j\, dt = -\omega^2 \int e^{i\omega t} F(t)\, dt = -\omega^2 e^{i\omega t} \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ désignant un autre polynôme.

Alors

$$z_c = i\omega \varphi(t)$$

et

$$\zeta_c = -\omega^2 \int e^{-i\omega t} \varphi(t)\, dt + i\omega e^{-i\omega t} \varphi(t) = e^{-i\omega t} \psi(t)$$
$$= e^{-i\omega t}[\psi_1(t) + i\psi_2(t)],$$

$\psi(t)$ étant un troisième polynôme dont ψ_1 et ψ_2 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire.

Dans le plan fixe, le point C décrit, comme le point J, une courbe unicursale. La courbe mobile est représentée, en coordonnées cartésiennes dans le plan mobile, par les équations

$$\xi = \psi_1(t) \cos \omega t + \psi_2(t) \sin \omega t,$$
$$\eta = -\psi_1(t) \sin \omega t + \psi_2(t) \cos \omega t.$$

En particulier, si l'on prend

$$F(t) = \frac{\omega^2 t^2}{2} - i\omega t,$$

le point J décrit une parabole. Le polynôme $\varphi(t)$ est lié à $F(t)$ par la relation générale

$$\varphi'(t) + i\omega \varphi(t) = F(t)$$

qui devient ici

$$\varphi'(t) + i\omega \varphi(t) = -i\omega t + \frac{\omega^2 t^2}{2},$$

et l'on aperçoit immédiatement la solution

$$\varphi(t) = -\frac{i\omega t^2}{2}.$$

De même, le polynôme $\psi(t)$ est lié à $\varphi(t)$ par la relation générale

$$\psi'(t) - i\omega\,\psi(t) = i\omega\,\varphi'(t),$$

qui se réduit à

$$\psi'(t) - i\omega\,\psi(t) = \omega^2 t,$$

d'où la solution

$$\psi(t) = 1 + i\omega t.$$

Dans ces conditions, la base du roulement a pour équation

$$z_c = \frac{\omega^2 t^2}{2}:$$

c'est l'axe de la parabole parcouru par le point C avec un mouvement uniformément accéléré.

La courbe roulante est déterminée par les deux équations

$$\xi = \cos\omega t + \omega t \sin\omega t,$$
$$\eta = -\sin\omega t + \omega t \cos\omega t:$$

c'est une développante de cercle. Le rayon de celui-ci est égal à l'unité, c'est-à-dire au paramètre de la parabole. On parvient ainsi à la proposition suivante, dont la vérification directe est bien facile :

Étant donnée une parabole, si l'on fait rouler sur son axe avec une vitesse angulaire constante la développante d'un cercle ayant un rayon égal au paramètre de la parabole, le point de contact, parti du sommet avec une vitesse nulle, parcourt l'axe d'un mouvement uniformément accéléré, et le centre d'accélération, toujours situé sur l'ordonnée du point de contact, décrit la parabole.
