Nouvelles annales de mathématiques

J. Dolbnia

Remarques sur la théorie des fonctions abéliennes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 478-502

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__478_0>

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ABÉLIENNES;

PAR M. J. DOLBNIA, à Nijni-Novgorod.

I.

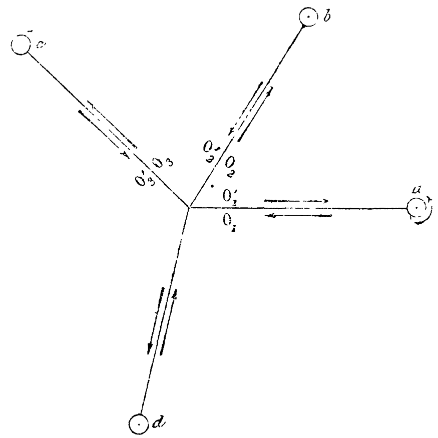
On sait que, dans l'étude des fonctions abéliennes, on peut se borner à la considération du cas particulier, quand l'équation fondamentale algébrique irréductible ne possède que les points critiques de second ordre. Nous nous occuperons des intégrales abéliennes de première espèce, c'est-à-dire des intégrales conservant une valeur finie sur toute la surface de la sphère.

Supposons que les intégrales abéliennes dépendent de l'équation algébrique irréductible

$$f(x, y) = 0,$$

qui possède les points critiques de second ordre. Autour de chacun de ces points ne se permutent que deux des n racines de l'équation. Dans chaque lacet nous distinguerons le commencement et la fin; ainsi le commencement du lacet (b) est le point O_2, la fin O'_2; il est inutile d'ajouter que les points O_1, O'_1, O_2, O'_2, ... sont infiniment voisins, ou, si l'on veut, coïncident avec l'origine des coordonnées. Néanmoins, pour plus de détermination, nous prendrons que l'origine des coordonnées se trouve toujours au point O_1, et nous supposerons que la variable complexe se meut toujours dans la même direction indiquée par les flèches; cette direction sera positive. La propriété fondamentale, bien connue, de la fonction algébrique y est la suivante. En partant de l'origine des coordonnées O_1 et en se mouvant successivement par tous les lacets, nous reviendrons à l'origine des coordonnées avec la même racine qu'au commencement.

Fig. 1.



Nous donnerons le nom de *première feuille* à la surface infinie sur laquelle la fonction y_1 arrive à l'origine des coordonnées avec la même valeur, en variant continuellement par tous les contours élémentaires dans la même direction (dans notre recherche, cette direction sera toujours contraire à la direction de l'aiguille de l'horloge); la surface ayant le même caractère pour la fonction y_2 portera le nom de *seconde feuille;* en général, une surface possédant le même caractère pour y_k sera *la feuille* k^{ieme}. On peut supposer, si l'on veut, ces feuilles superposées comme dans le système de Riemann; mais nous employons l'expression *feuille* dans le sens d'un simple terme, ne joignant à ce mot aucune signification matérielle. Si la fonction y, après avoir passé par la variable complexe du lacet, arrive à l'origine des coordonnées avec une valeur nouvelle, nous dirons que le lacet est *actif;* si, au contraire, dans les mêmes conditions, la fonction ne change pas de valeur, nous dirons que le lacet est *passif*. Si, autour du point critique c, se permutent deux racines y_i, y_k, le lacet $(c)_i^k$ joue sur deux feuilles un rôle actif. Pour déterminer les numéros de ces feuilles, il faut agir de la manière suivante. Partons de l'origine O_3 du lacet c avec la racine y_i et avançons dans la direction positive jusqu'à ce que nous arrivions à l'origine des coordonnées O_1. Si nous sommes arrivés au point O_1 avec la racine y_A, nous dirons que le lacet $(c)_i^k$, avec son indice i, appartient à la feuille A. Partons ensuite du point O_3 (l'origine du lacet c) avec la racine y_k et avançons dans la direction positive jusqu'à l'origine des coordonnées O_1. Si nous sommes arrivé au point O_1 avec la racine y_B, nous dirons que le lacet $(c)_i^k$ avec son indice k appartient à la feuille B. La propriété des lacets énoncés ci-dessus entraîne une propriété encore plus intéressante que nous expliquerons par un exemple. Posons que le lacet $(c)_i^k$ permute deux racines y_i, y_k et, par conséquent, appartient par ses indices aux deux feuilles A, B. Partons dès l'origine des coordonnées O_1 avec la racine y_A; nous arriverons au point O_3 avec la racine y_i; après cela, il faudrait traverser le lacet $(c)_i^k$ et alors la fonction dans le point O'_3 acquerrait la valeur y_k. Si nous passons directement du point O_3 au point O'_3, sans décrire le lacet $(c)_i^k$, nous arriverons au point O'_3 avec la racine y_i et non avec la racine y_k comme il l'aurait fallu. Mais sortir du lacet $(c)_i^k$, avec la racine y_i, signifie y entrer avec la racine y_k. Et, comme le lacet $(c)_i^k$ appartient par son indice k à la feuille B, l'omission du lacet actif $(c)_i^k$ équivaut au passage à une feuille nouvelle. D'où suit la conclusion :

Si l'on fait, à la place où se trouve le point critique c, *la coupure des deux feuilles* A, B *de manière* *que le point critique disparaisse pour toujours et que l'on commence le mouvement au point* O_1 *avec la racine* y_A, *en traversant la coupure,* y *ne change pas de valeur, mais le mouvement ne fera que passer dans une feuille nouvelle.*

Théorème I. — *Si l'on part de l'origine des coordonnées* O_1 *avec une racine de l'équation*

$$f(x, y) = 0,$$

et si l'on se meut dans la direction positive en passant successivement d'un lacet à un autre, on peut choisir des lacets tels qu'en les supprimant complètement on parvient au passage continuel d'une feuille à une autre jusqu'à ce que toutes les feuilles soient épuisées; après quoi s'effectuera le passage de la dernière feuille à la première; en opérant ainsi, nous ferons autant de tours complets qu'il y avait de feuilles et nous formerons autant de coupures qu'il y avait de feuilles moins une; chaque feuille, pendant ce mouvement, sera passée en entier et seulement une fois.

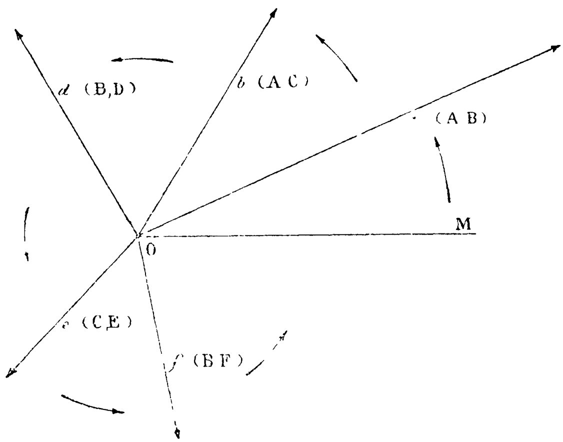
Démonstration. — Soit le point O l'origine des coordonnées, et M le premier point critique que la variable complexe doit décrire (le point M est tout à fait arbitraire). Posons que le mouvement commence à la feuille A; par conséquent, on part de l'origine des coordonnées avec la racine y_A et l'on commence le mouvement dans la direction positive. Parmi les lacets actifs appartenant à la feuille A, prenons arbitrairement un seul pour la formation de la première coupure. Posons que le lacet destiné à la coupure joue un rôle actif sur deux feuilles A et B; soit ce lacet

$$a(A, B).$$

Coupons deux feuilles A et B par la ligne infinie O*a*.

Alors, pendant le mouvement continuel de la variable complexe, nous décrirons dans la feuille A l'angle MOa et, par la coupure Oa, nous passerons dans la feuille B.

Fig. 2.



La seconde coupure doit servir au passage dans une feuille nouvelle. On peut passer à la feuille nouvelle soit de la feuille B, soit de la feuille A; cela dépend entièrement de notre volonté. Si nous voulons passer à une feuille nouvelle de la feuille A, après avoir fait le premier tour, nous arriverons à l'origine des coordonnées avec la racine y_B; le second tour commencera à la feuille B et nous devrons décrire, dans cette feuille, l'angle MOa jusqu'à la coupure Oa; par cette coupure nous passons encore à la feuille A et, par une nouvelle coupure, de la feuille A dans une nouvelle feuille, comme nous l'avons voulu. Mais, si nous voulons passer dans une nouvelle feuille de la feuille B, ce passage devra s'effectuer pendant le premier tour; il faudra alors faire une nouvelle coupure dans l'angle

$$aOM = 2\pi - MOa;$$

la ligne Od marquera cette coupure. Cette coupure existant, le passage dans une nouvelle feuille s'accomplira pendant le premier tour. En effet, par la coupure Oa, nous passerons à la feuille B et, par la coupure Od, à la feuille D; et comme nous ne rencontrerons aucune coupure donnant un passage à une nouvelle feuille, le premier tour sera terminé à l'origine des coordonnées et dans la feuille D, par conséquent avec la racine y_D.

Le second tour commencera à la feuille D et y continuera jusqu'à la rencontre avec la coupure Od par laquelle le mouvement passera dans la feuille B. Comme nous n'avons pas voulu passer de la feuille D à une feuille nouvelle, nous devrons effectuer ce passage de la feuille B ou de la feuille A. Sur notre figure, le passage est effectué de la feuille B par la coupure Of dans la feuille F, où le second tour sera terminé. Plus loin il faudra avoir soin de passer de la feuille F à une nouvelle feuille. Si, pour une cause quelconque, nous n'avons pas trouvé nécessaire d'effectuer un passage direct de la feuille F à une feuille nouvelle, commençons le troisième tour dans la feuille F, où nous continuerons le mouvement jusqu'à la rencontre avec la coupure Of par laquelle nous passerons dans la feuille B, où nous terminerons le troisième tour.

Pendant le quatrième tour, passons par la coupure aO dans la feuille A et ensuite, par la coupure Ob, dans la feuille C, plus loin, par la coupure Oe, dans la feuille E, où nous terminerons le quatrième tour. S'il n'y a plus de nouvelles feuilles, le quatrième tour se terminera dans la feuille E. Pendant le cinquième, passons par la coupure Oe dans la feuille C, où nous terminerons le cinquième tour. Pendant le sixième tour, passons par la coupure Ob dans la première feuille, où nous terminerons le sixième mouvement. Nous avons eu six feuilles, nous avons fait autant de tours et cinq coupures. Le mouvement dans une feuille quelconque commence depuis la coupure avec l'indice de cette feuille et continue jusqu'à une nouvelle coupure avec ce même indice. Outre cela, le mouvement ne se répète plus dans le même ordre. Pour cette raison, le mouvement dans une feuille quelconque, par exemple B, aura lieu dans les angles

$$aod + dof + foa = 2\pi.$$

Ainsi le théorème est prouvé. Voici un exemple : Soient neuf feuilles marquées des numéros 1, 2, ..., 9. Par les points critiques sont faites des coupures dont l'ordre, pendant le mouvement dans la direction positive, est le suivant

$$a(1,2),\quad b(1,3),\quad c(2,4),\quad d(2,5),$$
$$e(3,9),\quad f(4,6),\quad g(5,8),\quad h(1,7).$$

Le Tableau ci-joint contient les angles décrits dans chaque feuille pendant chacun des neuf tours :

Numéro de la feuille.	Tours 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1	MOa	»	»	»	»	aob	»	bOh	hOM
2	aOc	»	cOd	»	dOM	MOa	»	»	»
3	»	»	»	»	»	bOe	eOM	MOb	»
4	cOf	fOM	MOc	»	»	»	»	»	»
5	»	»	dOg	gOM	MOd	»	»	»	»
6	fOM	MOf	»	»	»	»	»	»	»
7	»	»	»	»	»	»	»	hOM	MOh
8	»	»	gOM	MOg	»	»	»	»	»
9	»	»	»	»	»	eOM	MOe	»	»

THÉORÈME II. — *Prenons deux intégrales abéliennes indépendantes, de première espèce, u et v. Si nous intégrons suivant le contour déterminé par le théo-*

rème précédent, l'intégrale

$$\int u\,\partial v$$

sera égale à zéro.

Pour démontrer, remarquons que l'intégrale prise suivant la totalité de tous les lacets actifs d'une feuille quelconque dans la direction positive, d'après le théorème de Cauchy, est égale à zéro, puisque l'infinité n'est pas le point critique de la fonction y dont dépendent les intégrales abéliennes.

Indiquons l'intégrale prise dans la totalité des lacets actifs de la première feuille par

$$\mathrm{H}(\mathrm{I}),$$

pour la seconde feuille

$$\mathrm{H}(\mathrm{II}), \quad \ldots;$$

alors nou savons

$$\mathrm{H}(\mathrm{I}) = \mathrm{H}(\mathrm{II}) = \mathrm{H}(\mathrm{III}) = \ldots = 0.$$

Nous désignerons ainsi l'intégrale prise suivant une partie du contour de la feuille par

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{H}}}(\mathrm{A}),$$

où α est l'indice de la racine avec laquelle l'intégration a commencé, β l'indice de la racine avec laquelle l'intégration a été terminée, A l'indice de la feuille où l'intégration a eu lieu. Enfin l'intégrale prise suivant un lacet quelconque, nous désignerons ainsi

$$\alpha\beta(\mathrm{A}),$$

où α, β, A ont la signification indiquée ci-dessus. Admettant ces significations, supposons que nous avons, par exemple, cinq feuilles, et les coupures sont faites dans l'ordre suivant

$$a(\mathrm{I}, \mathrm{II}), \quad b(\mathrm{I}, \mathrm{III}), \quad c(\mathrm{II}, \mathrm{IV}), \quad d(\mathrm{II}, \mathrm{V}).$$

Posons encore que le lacet a permute les racines y_i, y_x, le lacet (b) permute les racines y_e, y_m, le lacet (c) permute les racines y_n, y_p, enfin le lacet (d) permute les racines y_q, y_r. Le premier tour donne pour l'intégrale la signification

$$(1) \qquad \overset{i}{\underset{1}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + \overset{n}{\underset{i}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{4}{\underset{n}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}).$$

Le deuxième tour donne

$$(2) \qquad \overset{p}{\underset{4}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + \overset{q}{\underset{p}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{5}{\underset{q}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}).$$

Le troisième tour donne

$$(3) \qquad \overset{r}{\underset{5}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) + \overset{2}{\underset{r}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}).$$

Le quatrième tour donne

$$(4) \qquad \overset{k}{\underset{2}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{l}{\underset{k}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + \overset{3}{\underset{l}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}).$$

Enfin le cinquième tour donne

$$(5) \qquad \overset{m}{\underset{3}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) + \overset{1}{\underset{m}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}).$$

En ajoutant (1), (2), (3), (4), (5), nous aurons

$$\begin{aligned}
\int u\, dv = {} & \overset{i}{\underset{1}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + \overset{n}{\underset{i}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{4}{\underset{n}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + \overset{p}{\underset{4}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) \\
& + \overset{q}{\underset{p}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{5}{\underset{q}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) + \overset{r}{\underset{5}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) + \overset{2}{\underset{r}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) \\
& + \overset{k}{\underset{2}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{l}{\underset{k}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + \overset{3}{\underset{l}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) + \overset{m}{\underset{3}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) + \overset{1}{\underset{m}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I})
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\int u\,\partial v = {} & \overset{i}{\underset{1}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + ik(\mathrm{I}) + ki(\mathrm{II}) \\ & + \overset{n}{\underset{i}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + np(\mathrm{II}) + pn(\mathrm{IV}) \\ & + \left[\overset{4}{\underset{n}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + \overset{p}{\underset{4}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + pn(\mathrm{IV})\right] \\ & + np(\mathrm{II}) + \overset{q}{\underset{p}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + qr(\mathrm{II}) \\ & + \left[rq(\mathrm{V}) + \overset{5}{\underset{q}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) + \overset{r}{\underset{5}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V})\right] \\ & + rq(\mathrm{V}) + qr(\mathrm{II}) + \overset{2}{\underset{r}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{k}{\underset{2}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) \\ & + ki(\mathrm{II}) + ik(\mathrm{I}) + \overset{l}{\underset{k}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + lm(\mathrm{I}) \\ & + \left[ml(\mathrm{III}) + \overset{3}{\underset{l}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) + \overset{m}{\underset{3}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III})\right] \\ & + ml(\mathrm{III}) + lm(\mathrm{I}) + \overset{1}{\underset{m}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}).\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}\overset{4}{\underset{n}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + \overset{p}{\underset{4}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + pn(\mathrm{IV}) &= \mathrm{H}(\mathrm{IV}) = 0, \\ rq(\mathrm{V}) + \overset{5}{\underset{q}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) + \overset{r}{\underset{5}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) &= \mathrm{H}(\mathrm{V}) = 0, \\ ml(\mathrm{III}) + \overset{3}{\underset{l}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) + \overset{m}{\underset{3}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) &= \mathrm{H}(\mathrm{III}) = 0,\end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\int u\,\partial v = {} & \overset{i}{\underset{1}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + ik(\mathrm{I}) \\ & + \Big[ki(\mathrm{II}) + \overset{n}{\underset{i}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + np(\mathrm{II}) \\ & \qquad + \overset{q}{\underset{p}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + qr(\mathrm{II}) + \overset{2}{\underset{r}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{k}{\underset{2}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II})\Big] \\ & + \overset{l}{\underset{k}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + lm(\mathrm{I}) + \overset{1}{\underset{m}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}).\end{aligned}$$

En remarquant que

$$
\begin{aligned}
ki(\mathrm{II}) + \overset{n}{\underset{i}{\Pi}}(\mathrm{II}) + np(\mathrm{II}) + \overset{q}{\underset{p}{\Pi}}(\mathrm{II}) \\
+ qr(\mathrm{II}) + \overset{2}{\underset{r}{\Pi}}(\mathrm{II}) + \overset{k}{\underset{2}{\Pi}}(\mathrm{II}) + \Pi(\mathrm{II}) = 0,
\end{aligned}
$$

nous aurons

$$
\begin{aligned}
\int u\,\partial x = \overset{i}{\underset{1}{\Pi}}(\mathrm{I}) + ik(\mathrm{I}) + \overset{l}{\underset{k}{\Pi}}(\mathrm{I}) \\
+ lm(\mathrm{I}) + \overset{1}{\underset{m}{\Pi}}(\mathrm{I}) + \Pi(\mathrm{I}) = 0,
\end{aligned}
$$

C. Q. F. D.

II.

Les deux théorèmes prouvés donnent la possibilité de trouver un lien entre les périodes des deux intégrales abéliennes indépendantes de première espèce. Posons que, moyennant les coupures, le passage continuel d'une feuille à une autre est garanti d'après le théorème premier; l'intégrale

$$\int u\,\partial x,$$

suivant le chemin indiqué, est égale à zéro. Considérons un point critique quelconque a permutant deux racines y_α, y_β; soit le lacet

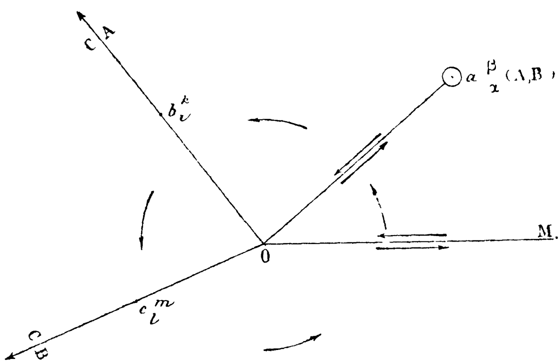
$$(a)_\alpha^\beta$$

appartenant, par l'indice α, à la feuille A et par l'indice β à la feuille B, ce qui est indiqué sur la *fig.* 3.

Posons que, pour le passage de la feuille A à la feuille B, existent deux coupures : l'une, par le point critique b_i^k, donnant le passage de la feuille A à la feuille C, et la seconde, par le point critique c_l^m, donnant passage de la feuille C à la feuille B.

Posons qu'en effectuant l'intégration, nous ayons déjà passé dans la feuille A et ensuite dans la feuille B. Au moment où nous arriverons à l'origine des coordonnées

Fig. 3.



avec la racine y_A, l'intégrale u a une certaine signification déterminée; désignons-la par Q. Alors, décrivant l'angle MOa dans la feuille A, nous arriverons à l'origine des coordonnées ayant la signification

$$u = Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A).$$

Après le passage du lacet

$$(a)_\alpha^\beta$$

par la variable complexe, l'intégrale

$$\int u\, dv$$

acquerra la valeur

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^a \Big[Q - \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A) + u_\alpha\Big] dv_\alpha - \int_0^a \Big[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A) + \alpha\beta(A) + u_\beta\Big] dv_\beta \\ &= \Big[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A)\Big] \int_0^a dv_\alpha - \Big[Q - \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A) + \alpha\beta(A)\Big] \int_0^a dv_\beta \\ &+ \int_0^a u_\alpha\, dv_\alpha - \int_0^a u_\beta\, dv_\beta. \end{aligned}\right.$$

ou, désignant

$$\int_0^a dv_\alpha = L_\alpha^a, \qquad \int_0^a dv_\beta = L_\beta^a,$$

nous aurons pour (6) l'expression

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A)\Big](L_\alpha^a - L_\beta^a) \\ &\quad - \alpha\beta(A) L_\beta^a + \int_0^a u_\alpha\, dv_\alpha - \int_0^a u_\beta\, dv_\beta. \end{aligned}\right.$$

Pour le même point critique dans la feuille B, nous trouverons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[Q - \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A) - \alpha\beta(A) - \overset{\iota}{\underset{\beta}{H}}(A) + \overset{l}{\underset{\iota}{H}}(C) + \overset{B}{\underset{l}{H}}(B)\Big] \\ &\quad \times (L_\beta^a - L_\alpha^a) - \beta\alpha(B) L_\alpha^a + \int_0^a u_\beta\, dv_\beta - \int_0^a u_\alpha\, dv_\alpha. \end{aligned}\right.$$

et comme le lacet

$$(a)_\alpha^\beta(A, B)$$

n'appartient qu'aux deux feuilles A et B, la partie de l'intégrale

$$\int u\, dv$$

correspondant à un seul point critique sera exprimée par la somme (7), (8) et, par conséquent, sera égale à

$$\left[\alpha\beta(A) + \overset{\iota}{\underset{\beta}{H}}(A) + \overset{\iota}{\underset{\iota}{H}}(C) + \overset{B}{\underset{\iota}{H}}(B) - \overset{\beta}{\underset{B}{H}}(B)\right]$$
$$\times(L_{\beta}^{\alpha} - L_{\alpha}^{a}) - \alpha\beta(A)(L_{\beta}^{a} - L_{\alpha}^{a}),$$

ou

$$\left[\overset{\iota}{\underset{\beta}{H}}(A) - \overset{\iota}{\underset{\iota}{H}}(C) - \overset{B}{\underset{\iota}{H}}(B) - \overset{\beta}{\underset{B}{H}}(B)\right](L_{\beta}^{a} - L_{\alpha}^{a}).$$

La quantité

$$\overset{\iota}{\underset{\beta}{H}}(A) - \overset{\iota}{\underset{\iota}{H}}(C) + \overset{B}{\underset{\iota}{H}}(B) - \overset{\beta}{\underset{B}{H}}(B),$$

que nous désignerons par

$$\Omega_a,$$

formera la période. Désignons encore

$$L_{\beta}^{\iota} - L_{\alpha}^{a} - L_{\beta\alpha}^{a},$$

alors la partie de l'intégrale

$$\int u\,ds,$$

correspondant à un seul point critique

$$a_{\beta}^{\alpha}(A, B),$$

s'exprimera par

$$\Omega_a\,L_{\beta\alpha}^{a}.$$

Si nous désignons les points critiques, sans compter ceux par lesquels les coupures sont faites, par

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_m,$$

alors

$$(9)\qquad \int u\,ds = \sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{a_i}\,L_{\beta_i\alpha_i}^{a_i} = 0.$$

Maintenant il faut prendre soin que l'equation (9) ne contient que les périodes des deux intégrales u et v. Comme l'intégrale

$$\int dv$$

relativement au lacet

$$(a)_\alpha^\beta,$$

que nous avons désignée par $L_{\alpha\beta}^a$, désignons l'intégrale

$$\int du$$

relativement à ce même lacet par $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}^a$. Raisonnant relativement à l'intégrale

$$\int v\,du,$$

comme nous avons raisonné relativement à

$$\int u\,dv,$$

nous avons l'équation analogique

$$\sum_{i=1}^{i=m} E^{a_i} \mathfrak{A}_{\alpha_i\,\beta_i}^{a_i} = 0,$$

où E est formé des L comme Ω est formé des $\mathfrak{A}$; et par conséquent

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{a_i} L_{\beta_i\,\alpha_i}^{a_i} = \sum_{i=1}^{i=m} E_{a_i} \mathfrak{A}_{\alpha_i\,\beta_i}^{a_i} = 0.$$

Choisissons maintenant les lacets fondamentaux qui pourraient servir au passage de y_1 à toutes les autres racines

$$y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_\alpha,\ y_\beta,\ \ldots,\ y_n,$$

et désignons par U_α la valeur de l'intégrale u, prise suivant les lacets fondamentaux unissant y_1 avec y_α; soit V_α ayant la même signification pour l'intégrale v. Si nous posons

$$\Omega_{a_i} = \mathfrak{A}^{a_i}_{\alpha_i\beta_i} + \mathfrak{A}^{b_i}_{\beta_i\gamma_i} + \ldots + \mathfrak{A}^{o_i}_{\omega_i d_i},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\Omega_{a_i} = &\left[U_{\alpha_i} + \mathfrak{A}^{a_i}_{\alpha_i\beta_i} - U_{\beta_i} \right] \\ &+ \left[U_{\beta_i} + \mathfrak{A}^{b_i}_{\beta_i\gamma_i} - U_{\gamma_i} \right] + \ldots [U_{\omega_i} + \mathfrak{A}_{\omega_i\alpha_i} - U_{\alpha_i}];\end{aligned}$$

mais alors chaque quantité de la forme

$$\mathfrak{A}^{a_i}_{\beta\alpha_{i}},$$

donnera une période que nous désignerons ainsi

$$(\mathfrak{A}^{a_i}_{\alpha_i\beta_i}).$$

D'où il suit que la partie droite de l'équation (10) ne changera pas si, dans chaque quantité de la forme

$$E_{a_i},$$

on substitue, à la place de

$$L^{a_i}_{\alpha_i\beta_i},$$

la période

$$V_{\alpha_i} + L^{a_i}_{\alpha_i\beta_i} - V_{\beta_i} = (L^{a_i}_{\alpha_i\beta_i}),$$

et, par conséquent, la partie gauche de la même équation ne changera pas à la suite d'une telle substitution, et nous aurons l'équation (9) dans la forme

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{a_i}(L^{a_i}_{\alpha_i\beta_i}) = 0,$$

équation donnant le lien entre les périodes.

Si nous désignons par N le nombre des points critiques de l'équation

$$f(x, y) = 0$$

et par n le nombre de ses racines, nous aurons $(n-1)$

lacets fondamentaux; de même le nombre des coupures sera $(n-1)$.

Comme les périodes (L) qui ne contiennent que les lacets fondamentaux sont égales à zéro, le nombre de toutes les périodes de l'intégrale abélienne sera

$$2p = N - 2(n-1) = m.$$

L'application des théorèmes démontrés aux intégrales hyperelliptiques est surtout intéressant. Prenons deux intégrales hyperelliptiques indépendantes

$$u = \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad v = \int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où

$$R(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p})(x-a_{2p+1})(x-a_{2p+2}),$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions entières dont les degrés ne surpassent pas $(p-1)$. Posons que les points critiques sont disposés sur le plan dans l'ordre marqué par leurs numéros.

L'équation

$$y^2 = R(x)$$

a seulement deux racines et, par conséquent, il y a deux feuilles; chaque point critique appartient à deux feuilles et, par conséquent, il suffit de faire une coupure qu'il faut tracer de l'origine des coordonnées par un point critique quelconque; menons la coupure Oa_{2p+2}; il faudra faire deux tours. Le premier tour donnera :

pour le point critique a_1,

$$\int_0^{a_1} u\,dv + \int_0^{a_1} (2A_1 - u)\,dv = 2A_1B_1;$$

pour le point a_2,

$$-\int_0^{a_2} (2A_1 - u)\,dv$$

$$-\int_0^{a_2} (2A_1 - 2A_2 + u)\,dv = -4A_1B_2 + 2A_2B_2;$$

pour le point a_3,

$$4(A_1 - A_2)B_3 + 2A_3B_3\,:$$

pour le point a_4,

$$-4(A_1 - A_2 + A_3)B_4 + 2A_4B_4, \quad \ldots;$$

enfin pour le point a_{2p+1},

$$4(A_1 - A_2 + \ldots + A_{2p})B_{2p+1} + 2A_{2p+1}B_{2p+1}.$$

Le second tour donnera

$$\begin{aligned}
&-4(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots - A_{2p} + A_{2p+1})B_1 + 2A_1B_1\\
&-4(A_2 - A_3 + A_4 - \ldots\ldots\ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_2 + 2A_2B_2\\
&-4(A_3 - A_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - A_{2p} + A_{2p+1})B_3 + 2A_3B_3\\
&-4(A_4 - A_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_4 + 2A_4B_4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-4(A_{2p} - A_{2p+1})B_{2p} + 2A_{2p}B_{2p}\\
&-4A_{2p+1}B_{2p+1} + 2A_{2p+1}B_{2p+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int u\,dv = &-4(A_1 - A_2)B_2\\
&-4(A_1 - A_2)B_3\\
&-4(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)B_4\\
&+4(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)B_5\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-4(A_1 - A_2 + A_3 - \ldots + A_{2p-1} - A_{2p})B_{2p}\\
&-4(A_1 - A_2 + A_3 - \ldots - A_{2p-1} - A_{2p})B_{2p+1}\\
&-4(A_2 - A_3 + A_4 - \ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_1\\
&-4(A_2 - A_3 + A_4 - \ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_2\\
&-4(A_4 - A_3 + A_5 + \ldots - A_{2p} - A_{2p+1})B_3\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad -4(A_{2p} - A_{2p+1})B_{2p} = 0;
\end{aligned}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned}
&4(A_1 - A_2)(B_2 - B_3 + \ldots + B_{2p} - B_{2p+1})\\
&- 4(B_1 - B_2)(A_2 - A_3 + \ldots + A_{2p} - A_{2p+1})\\
&+ 4(A_3 - A_4)(B_4 - B_5 + \ldots + B_{2p} - B_{2p+1})\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ 4(A_{2p-1} - A_{2p})(B_{2p} - B_{2p+1})\\
&\qquad\qquad - 4(B_{2p-1} - B_{2p})(A_{2p} - A_{2p+1}) = 0.
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
&2(A_1 - A_2) = \omega_2, &&2(B_1 - B_2) = \varepsilon_2,\\
&2(A_3 - A_4) = \omega_4, &&2(B_3 - B_4) = \varepsilon_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&2(A_{2p-1} - A_{2p} = \omega_{2p}, &&2(B_{2p-1} - B_{2p}) = \varepsilon_{2p},
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
2(A_2 - A_3 + \ldots + A_{2p} - A_{2p+1}) = \omega_1,\\
2(A_4 - A_5 + \ldots + A_{2p} - A_{2p+1}) = \omega_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
2(A_{2p} - A_{2p+1}) = \omega_{2p-1},\\
2(B_2 - B_3 + \ldots + B_{2p} - B_{2p+1}) = \varepsilon_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
2(B_{2p} - B_{2p+1}) = \varepsilon_{2p-1},
\end{gathered}$$

nous aurons

$$\sum_{i=1}^{i=p} (\omega_{2i-1}\,\varepsilon_{2i} - \varepsilon_{2i-1}\,\omega_{2i}) = 0.$$

Dans cette forme remarquable, on a presque immédiatement une relation entre les périodes de toutes les intégrales abéliennes de première espèce. Pour éviter les abstractions inutiles, analysons en détail l'exemple emprunté de l'Ouvrage de Clebsch et Gordan : *Theorie der abelschen Functionen*, 1886. Les discussions que nous offrirons possèdent la généralité nécessaire. Les points critiques sont disposés dans la direction positive dans l'ordre suivant

$$\begin{matrix}
a^1_{1,2}, & a^2_{2,3}, & a^3_{1,4}, & a^4_{2,4}, & a^5_{3,4}, & a^6_{1,3},\\
a^7_{2,4}, & a^8_{1.2}, & a^9_{2.3}, & a^{10}_{2,4}. & a^{11}_{3,4}. & a^{12}_{3,4}
\end{matrix}$$

Dans les lignes suivantes est présenté le rapport de chaque lacet à deux feuilles; les numéros des feuilles sont indiqués par les chiffres romains avec la condition que l'indice arabe de gauche corresponde au même indice romain. Ainsi nous avons

$$a^1_{1,2}(\mathrm{I},\ \mathrm{II}),\quad a^2_{2,3}(\mathrm{III}),\quad a^3_{1,4}(\mathrm{II},\ \mathrm{IV}),\quad a^4_{2,4}(\mathrm{III},\ \mathrm{II}),$$
$$a^5_{3,4}(\mathrm{I},\ \mathrm{III}),\quad a^6_{1,3}(\mathrm{IV},\ \mathrm{III}),\quad a^7_{2,4}(\mathrm{II},\ \mathrm{I}),\quad a^8_{1,2}(\mathrm{III},\ \mathrm{I}),$$
$$a^9_{2,3}(\mathrm{III}.\ \mathrm{IV}),\quad a^{10}_{2,4}(\mathrm{IV},\ \mathrm{II}),\quad a^{11}_{3,4}(\mathrm{III},\ \mathrm{IV}),\quad a^{12}_{3,4}(\mathrm{IV},\ \mathrm{III}).$$

Les coupures sont faites à travers les points

$$a^6_{1,3}(\mathrm{IV},\mathrm{III}).\quad a^7_{2,4}(\mathrm{II},\ \mathrm{I}),\quad a^8_{1,2}(\mathrm{III},\ \mathrm{I}).$$

Après la formule

$$\Omega_{a_i} L^{a_i}_{\beta_i\,\alpha_i} = \left[\overset{\iota}{\underset{\beta}{\mathrm{H}}}(\mathrm{A}) + \overset{l}{\underset{\iota}{\mathrm{H}}}(\mathrm{C}) + \overset{\mathrm{B}}{\underset{l}{\mathrm{H}}}(\mathrm{B}) + \overset{\beta}{\underset{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}}(\mathrm{B}) \right] L^{a_i}_{\beta_i\,\alpha_i},$$

nous avons, pour le point $a^1_{1\,2}(\mathrm{I},\ \mathrm{II})$,

$$(\mathfrak{A}^2_{2,3} + \mathfrak{A}^5_{3,4} + \mathfrak{A}^{10}_{4,2})\, L^1_{2\,1}:$$

pour le point $a^2_{2,3}(\mathrm{I},\ \mathrm{III})$,

$$(\mathfrak{A}^5_{3\,4} + \mathfrak{A}^{10}_{4\,2} + \mathfrak{A}^1_{2\,1} + \mathfrak{A}^3_{1\,4} + \mathfrak{A}^4_{4\,2} + \mathfrak{A}^9_{2\,3} + \mathfrak{A}^{11}_{3\,4} + \mathfrak{A}^{12}_{4\,3})\, L^2_{3\,2};$$

pour le point $a^3_{1\,4}(\mathrm{II},\ \mathrm{IV})$,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}^4_{4\,2} &+ \mathfrak{A}^9_{2\,3} + \mathfrak{A}^{11}_{3\,4} + \mathfrak{A}^{12}_{4\,3} + \mathfrak{A}^2_{3\,2}\\ &\mathfrak{A}^4_{2\,4} + \mathfrak{A}^5_{4\,3} + \mathfrak{A}^9_{3\,2} + \mathfrak{A}^{10}_{2\,4} + \mathfrak{A}^{11}_{4\,3} + \mathfrak{A}^{12}_{3\,4})\, L^3_{4\,1}\\ &= (\mathfrak{A}^2_{2\,3} + \mathfrak{A}^5_{3\,4} + \mathfrak{A}^{10}_{4\,2})\, L^3_{1\,4};\end{aligned}$$

pour le point $a^4_{2\,4}(\mathrm{III},\ \mathrm{II})$,

$$(\mathfrak{A}^9_{2\,3} + \mathfrak{A}^{11}_{3\,4} + \mathrm{A}^{12}_{4\,3} + \mathfrak{A}^2_{3\,2})\, L^4_{2\,4}:$$

pour le point $a^5_{3\,4}(\mathrm{I},\ \mathrm{III})$,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}^{10}_{4\,2} &+ \mathfrak{A}^1_{2\,1} + \mathfrak{A}^3_{1\,4} + \mathfrak{A}^4_{4\,2} + \mathfrak{A}^9_{2\,4}\\ &+ \mathfrak{A}^{11}_{3\,4} + \mathfrak{A}^{12}_{4\,3} + \mathfrak{A}^2_{3\,2} + \mathfrak{A}^4_{2\,4})\, L^5_{1\,3}:\end{aligned}$$

pour le point a^{9}_{23}(III, IV),

$$(\mathfrak{A}^{11}_{34} + \mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{4}_{24} + \mathfrak{A}^{5}_{43})\,\mathrm{L}^{9}_{32}:$$

pour le point a^{10}_{42}(II, IV),

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}^{1}_{21} + \mathfrak{A}^{3}_{14} + \mathfrak{A}^{4}_{42} + \mathfrak{A}^{9}_{23} + \mathfrak{A}^{11}_{34}&\\ + \mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{4}_{24} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{9}_{32})\,\mathrm{L}^{10}_{24}&\\ = (\mathfrak{A}^{1}_{21} + \mathfrak{A}^{3}_{14} + \mathfrak{A}^{11}_{34} + \mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{5}_{43})\,\mathrm{L}^{10}_{24}&:\end{aligned}$$

pour le point a^{11}_{34}(III, IV),

$$(\mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{4}_{24} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{9}_{32} + \mathfrak{A}^{10}_{24})\,\mathrm{L}^{11}_{43}:$$

pour le point a^{12}_{43}(III, IV),

$$(\mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{4}_{24} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{9}_{32} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43})\,\mathrm{L}^{12}_{34}.$$

En posant que les lacets

$$a^{3}_{1,4},\quad a^{4}_{4,2},\quad a^{9}_{2,3}$$

sont des lacets fondamentaux, nous aurons

$$\mathfrak{A}^{3}_{14} = \mathfrak{A}^{4}_{42} = \mathfrak{A}^{9}_{23} = \mathrm{L}^{3}_{14} = \mathrm{L}^{4}_{42} = \mathrm{L}^{9}_{23} = 0.$$

Nous aurons la relation entre les périodes dans la forme (11) :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} - \mathfrak{A}^{10}_{42})\,\mathrm{L}^{1}_{21}\\ &\quad + (\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\,\mathrm{L}^{2}_{23}\\ &\quad + (\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\,\mathrm{L}^{5}_{34}\\ &\quad - (\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} - \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\,\mathrm{L}^{10}_{42}\\ &\quad + (\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} - \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\,\mathrm{L}^{11}_{34}\\ &\qquad\qquad + (\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{11}_{34})\,\mathrm{L}^{12}_{43} = 0.\end{aligned}\right.$$

L'expression (13) est symétrique par rapport à $\mathfrak{A}$ et L. Les deux premières lignes contiennent les deux membres symétriques

$$\mathfrak{A}^{2}_{23}\,\mathrm{L}^{1}_{21},\quad \mathfrak{A}^{1}_{12}\,\mathrm{L}^{2}_{23};$$

par conséquent, prenons les deux premières lignes pour le point de départ de notre transformation et formons le binôme symétrique

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{5}_{43}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34})(L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42})\\
&\qquad-(\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42})\\
&\qquad\quad\times(L^{1}_{12}+L^{5}_{43}+L^{10}_{24}+L^{11}_{43}+L^{12}_{34})\\
&\quad=\omega_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\omega_2.
\end{aligned}\right.
$$

Faisons la soustraction (13), (14) ; nous aurons évidemment pour résultat une fonction symétrique semblable et, avec cela, le nombre des lignes sera diminué de deux unités. Ainsi nous avons pour reste

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A}^{10}_{24}L^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{12}_{34}L^{10}_{42}+\mathfrak{A}^{12}_{34}L^{11}_{34}+\mathfrak{A}^{11}_{34}L^{12}_{43}\\
&\quad=(\mathfrak{A}^{10}_{24}L^{5}_{34}-\mathfrak{A}^{5}_{34}L^{10}_{24})+(\mathfrak{A}^{12}_{34}L^{11}_{34}-\mathfrak{A}^{11}_{34}L^{12}_{34}).
\end{aligned}
$$

Nous avons, par conséquent, la relation entre les périodes dans la forme suivante :

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[(\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{5}_{43}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34})\\
&\qquad\times(L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42})-(\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42})\\
&\qquad\times(L^{1}_{12}+L^{5}_{43}+L^{10}_{24}+L^{11}_{43}+L^{12}_{34})]\\
&\quad+[\mathfrak{A}^{10}_{24}L^{5}_{34}-\mathfrak{A}^{5}_{34}L^{10}_{24}]+[\mathfrak{A}^{12}_{34}L^{11}_{34}-\mathfrak{A}^{11}_{34}L^{12}_{34}]=0.
\end{aligned}\right.
$$

Les périodes normales sont

$$
\begin{aligned}
\omega_1&=\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{5}_{43}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34},\\
\omega_2&=\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42},\\
\omega_3&=\mathfrak{A}^{10}_{24},\\
\omega_4&=\mathfrak{A}^{5}_{34},\\
\omega_5&=\mathfrak{A}^{12}_{34},\\
\omega_6&=\mathfrak{A}^{11}_{34};\\
\varepsilon_1&=L^{1}_{12}+L^{5}_{43}L^{10}_{24}+L^{11}_{43}+L^{12}_{34},\\
\varepsilon_2&=L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42},\\
\varepsilon_3&=L^{10}_{24},\\
\varepsilon_4&=L^{5}_{34},\\
\varepsilon_5&=L^{12}_{34},\\
\varepsilon_6&=L^{11}_{34}.
\end{aligned}
$$

Il est facile de prouver que chacune des périodes (13) s'exprimera par une fonction entière et linéaire des périodes normales avec les coefficients ± 1. Nous avons évidemment

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34} = \omega_1, \\
\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} = \omega_2. \\
\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\
\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_4, \\
\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{12}_{34} = \omega_2 + \omega_5, \\
\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{11}_{34} = \omega_2 + \omega_6.
\end{gathered}
$$

On peut former aussi les périodes normales par d'autres moyens. Par exemple, posons

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{12}_{34})(L^{2}_{23} + L^{5}_{34} + L^{10}_{42} + L^{11}_{34}) \\
&\quad -(\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{11}_{34})(L^{2}_{23} + L^{5}_{34} + L^{10}_{42} + L^{12}_{34}) \\
&= \omega_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \omega_2.
\end{aligned}
$$

En faisant la soustraction de ce binôme de (13), nous aurons à la place de six lignes seulement quatre :

$$
(16) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42})\, L^{1}_{21} \\
&+(\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{24})\, L^{2}_{23} \\
&+(\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34})\, L^{10}_{42} \\
&+(\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{10}_{24})\, L^{5}_{34}.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{10}_{24})(L^{2}_{23} + L^{5}_{34} + L^{10}_{42}) \\
&\quad -(\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42})(L^{1}_{12} + L^{5}_{43} + L^{10}_{24}) = \omega_3 \varepsilon_4 - \varepsilon_3 \omega_4.
\end{aligned}
$$

En faisant la soustraction de ce binôme de (16), nous aurons

$$
\mathfrak{A}^{5}_{34} L^{10}_{42} - \mathfrak{A}^{10}_{42} L^{5}_{34} = \omega_5 \varepsilon_6 - \varepsilon_5 \omega_6.
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \mathfrak{A}^{2}_{23} - \mathfrak{A}^{5}_{34} - \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{12}_{34}, \\
\omega_2 &= \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} - \mathfrak{A}^{11}_{34}, \\
\omega_3 &= \mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{10}_{24}, \\
\omega_4 &= \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42}, \\
\omega_5 &= \mathfrak{A}^{5}_{34}. \\
\omega_6 &= \mathfrak{A}^{10}_{42}.
\end{aligned}
$$

Les périodes (13) s'exprimeront au moyen des périodes normales, de la manière suivante :

$$\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{3}_{34} - \mathfrak{A}^{10}_{42} = \omega_4,$$
$$\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{43} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} - \mathfrak{A}^{12}_{34} = -\omega_1 + \omega_2 + \omega_3,$$
$$\mathfrak{A}^{1}_{12} - \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_6,$$
$$\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{3}_{34} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34} = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5,$$
$$\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{3}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{12}_{34} = \omega_1,$$
$$\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{3}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{11}_{34} = \omega_2.$$

La propriété des périodes obtenues à l'intégration immédiate de s'exprimer par une fonction entière et linéaire des périodes normales avec les coefficients ± 1 peut être prouvée, en général, de la manière suivante. Effectivement, après l'intégration, nous aurons une relation entre les périodes à laquelle nous pouvons donner la forme suivante :

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a^1_1 - a^1_2 + a^1_3 + \ldots + a^1_{l_1})\, b^1 \\ &+(a^2_1 - a^2_2 - a^2_3 - \ldots - a^2_{l_2})\, b^2 \\ &-(a^3_1 - a^3_2 - a^3_3 - \ldots - a^3_{l_3})\, b^3 \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-(a^{2p}_1 - a^{2p}_2 - a^{2p}_3 + \ldots - a^{p}_{l_l})\, b^{2p} = 0, \end{aligned} \right.$$

où les lettres a et b marquent les périodes des intégrales qui contiennent des cycles simples. Pour former la première paire des périodes normales, on prend deux lignes quelconques du (17); soit

$$a^1_1 - a^1_2 - a^1_3 - \ldots - a^1_{l_1} = \omega_1,$$
$$a^2_1 - a^2_2 - a^2_3 - \ldots - a^2_{l} = \omega_2.$$

En retranchant de (17) le binôme

$$\omega_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \omega_2$$

et en designant, en général, par ν^h_l le nombre égal à zéro ou à ± 1, nous aurons

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots + a_{l_3}^3 + \alpha_1^3\omega_1 + \alpha_2^3\omega_2)\, b^3 \\ + (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_{l_4}^4 + \alpha_1^4\omega_1 + \alpha_2^4\omega_2)\, b^4 \\ - (a_1^5 - a_2^5 + a_3^5 + \ldots + a_{l_5}^5 + \alpha_1^5\omega_1 + \alpha_2^5\omega_2)\, b^5 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - (a_1^{2p} + a_2^{2p} - a_3^{2p} + \ldots - a_{l_{2p}}^{2p} - \alpha_1^{2p}\omega_1 - \alpha_2^{2p}\omega_2)\, b^{2p}. \end{array}\right.$$

Posons que, pour la formation de la seconde paire des périodes normales, on prend

$$a_1^3 - a_2^3 + \ldots + a_{l_3}^3 + \alpha_1^3\omega_1 + \alpha_2^3\omega_2 = \omega_3,$$
$$a_1^4 - a_2^4 - \ldots - a_{l_4}^4 - \alpha_1^4\omega_1 - \alpha_2^4\omega_2 = \omega_4;$$

en retranchant de (18) le binôme

$$\omega_3\varepsilon_4 - \varepsilon_3\omega_4,$$

nous aurons pour reste

$$\begin{array}{l} (a_1^5 - a_2^5 + a_3^5 + \ldots - a_{l_5}^5 - \alpha_1^5\omega_1 - \alpha_2^5\omega_2 - \alpha_3^5\omega_3)\, b^5 \\ + (a_1^6 - a_2^6 + a_3^6 - \ldots - a_{l_6}^6 - \alpha_1^6\omega_1 - \alpha_2^6\omega_2 + \alpha_3^6\omega_3)\, b^6 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - (a_1^{2p} - a_2^{2p} + a_3^{2p} - \ldots + a_{l_{2p}}^{2p} - \alpha_1^{2p}\omega_1 - \alpha_3^{2p}\omega_2 - \alpha_2^{2p}\omega_3)\, b^{2p}. \end{array}$$

En continuant cette transformation nous aurons définitivement

$$\begin{array}{l} \Omega_1 = \omega_1, \\ \Omega_2 = \omega_2, \\ \Omega_3 = -\alpha_1^3\omega_1 - \alpha_2^3\omega_2 - \omega_3, \\ \Omega_4 = -\alpha_1^4\omega_1 - \alpha_2^4\omega_2 - \omega_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{2p} = -\alpha_1^{2p}\omega_1 - \alpha_2^{2p}\omega_2 - \ldots + \omega_{2p}. \end{array}$$
