NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CARVALLO

Théorème fondamental pour la résolution numérique des équations

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 429-433

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__429_0>

THÉORÈME FONDAMENTAL POUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS [1];

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. *Pour que les racines* α_p *et* α_{p+1} *du polynôme* $f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_p x^{m-p} + \ldots + A_m$ *soient séparées* [2], *il faut et il suffit que* $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ *soit négligeable devant* $\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$ *pour toutes les valeurs de* k *et de* l. *Le polynôme* $f(x)$ *se sépare alors en deux fragments. Le premier, obtenu en supprimant les termes qui suivent* A_p, *donne les* p *premières racines. Le second fragment, obtenu en négligeant les termes qui précèdent* A_p, *donne les* $m-p$ *dernières racines.*

La deuxième partie de ce théorème est fondamentale dans ma thèse. Je veux y revenir dans un double but : l'étendre en la précisant et signaler son importance.

La forme de l'énoncé que je viens de rappeler me pa-

[1] *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes*, p. 13, n° 9. Thèse de Doctorat. Gauthier-Villars et fils; 1890.

[2] Les racines sont supposées rangées dans l'ordre des modules décroissants. Un nombre imaginaire est dit *négligeable* devant un autre si le module du premier, divisé par celui du second, donne un quotient inférieur à l'erreur relative qu'on tolère dans le calcul. Enfin les racines α_p et α_{p+1} sont dites *séparées* si α_{p+1} est *négligeable* devant α_p.

raît celle qui convient le mieux à mon sujet, dégageant l'idée dominante sans s'attacher à fixer des limites précises. Cette recherche de précision et de rigueur qu'on a l'habitude d'apporter dans les approximations numériques vient, sans doute, de la préoccupation de présenter aux élèves des raisonnements inattaquables, mais elle offre un double inconvénient : alourdir les démonstrations par des calculs pénibles et dissimuler ainsi l'idée principale. Voilà pour la théorie. Pratiquement, elle conduit à des limites trop larges, parce que le raisonnement embrasse à la fois tous les cas les plus défavorables. Quoique je me sois trouvé parfaitement d'accord avec mes juges sur ce point, je suis heureux de satisfaire ici la légitime exigence des professeurs et des savants qui pourraient ne pas partager mes idées.

2. Je considère, non plus une équation algébrique de degré m, mais l'équation plus générale, à coefficients réels ou imaginaires,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = f(x) = \ldots &+ A_{p-l}\,x^{m-p+l}\ldots \\ &+ A_p\,x^{m-p}\ldots + A_{p+k}\,x^{m-p-k}\ldots, \end{aligned}\right.$$

qui peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens. Je suppose que l'inégalité

$$(2)\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}} < \operatorname{mod}\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de k et de l. Soit K la plus grande valeur du premier membre, L la plus petite valeur du second. On a par hypothèse $K < L$. Je vais chercher une condition précise qui assure la séparation des racines de l'équation (1) en deux groupes et trouver des limites à ces deux groupes.

Je donne à x une valeur dont le module est compris entre K et L. Je peux représenter ce module par

$$\operatorname{mod} x = n\mathrm{K} = \frac{1}{n'}\mathrm{L}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{nn'}\mathrm{L},$$

n et n' étant des nombres plus grands que 1. Pour cette valeur de x, je compare le terme $\mathrm{A}_p x^{m-p}$ à ceux qui suivent et à ceux qui précèdent. Il vient successivement

$$(3) \quad \operatorname{mod} \frac{\mathrm{A}_{p+k}\, x^{m-p-k}}{\mathrm{A}_p x^{m-p}} = \operatorname{mod} \frac{\mathrm{A}_{p+k}}{\mathrm{A}_p} \times x^{-k} \leqq \mathrm{K}^k \times (n\mathrm{K})^{-k} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{n}\right)^k,$$

$$(4) \quad \operatorname{mod} \frac{\mathrm{A}_{p-l}\, x^{m-p+l}}{\mathrm{A}_p x^{m-p}} = \operatorname{mod} \frac{\mathrm{A}_{p-l}}{\mathrm{A}_p} \times x^{l} \leqq \left(\frac{1}{\mathrm{L}}\right)^l \left(\frac{1}{n'}\mathrm{L}\right)^l \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{n'}\right)^l.$$

Les formules (3) montrent que les modules des termes qui suivent $\mathrm{A}_p x^{m-p}$ décroissent plus vite que ceux d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{n}$. Leur somme a un module inférieur à

$$\operatorname{mod} \mathrm{A}_p x^{m-p} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) = \operatorname{mod} \mathrm{A}_p x^{m-p} \times \frac{1}{n-1}.$$

De même, d'après les formules (4), la somme des termes qui précèdent $\mathrm{A}_p x^{m-p}$ est inférieure à

$$\operatorname{mod} \mathrm{A}_p x^{m-p} \times \frac{1}{n'-1}.$$

Ainsi le module S de la somme des termes différents de $\mathrm{A}_p x^{m-p}$ satisfait à l'inégalité

$$\mathrm{S} \leqq \operatorname{mod} \mathrm{A}_p x^{m-p} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n'-1}\right).$$

On sera certain que S est inférieur à $\operatorname{mod} \mathrm{A}_p x^{m-p}$, si l'on pose

$$\frac{1}{n-1} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{n'-1} < \frac{1}{2},$$

d'où

$$n > 3, \qquad n' > 3, \qquad K = \frac{1}{nn'} L < \tfrac{1}{9} L.$$

Pour la valeur de x considérée, le terme $A_p x^{m-p}$ ne peut pas se réduire avec la somme des autres, puisque cette somme a un module inférieur à celui de $A_p x^{m-p}$. L'équation n'est pas satisfaite.

En résumé, *si* $K < \frac{1}{9} L$, *les racines de l'équation* (1) *se séparent en deux groupes ; les unes ont leur module inférieur à* $3K$; *pour les autres, le module est supérieur à* $\frac{L}{3}$.

3. Maintenant, je suppose de plus K très petit devant L; les racines du groupe inférieur à 3K rendent très petite la somme des termes qui précèdent $A_p x^{m-p}$. On négligera cette somme dans le calcul de ce groupe de racines. Le calcul ci-dessus fait connaître une limite du module de la quantité négligée : c'est

$$\operatorname{mod} A_p x^{m-p} \times \frac{1}{n'-1}.$$

Exemple numérique. — Soit $K = \frac{1}{3000} L$. Les racines du groupe inférieur à $3K$ donnent $n' > 1000$. Pour ces racines, la somme des termes qui précèdent $A_p x^{m-p}$ est inférieure à $\operatorname{mod} \frac{1}{999} A_p x^{m-p}$. Il est clair, d'après le calcul même, que cette limite sera toujours bien trop forte. Si l'on néglige cette quantité, il en résultera sur le calcul des racines du groupe considéré une erreur relative de l'ordre de $\frac{1}{1000}$. La recherche d'une limite précise pour cette nouvelle erreur rentre dans le cadre d'une intéressante Note de M. Jablonski [1]. Je ne m'y arrête donc pas.

4. J'ai montré, dans ma thèse, que le théorème rappelé ci-dessus conduit à une méthode sûre pour résoudre facilement n'importe quelle équation numérique. En outre, il conduit très naturellement à la méthode d'approximation de Newton et à son extension. Cette méthode consiste, on le sait, à négliger les termes qui suivent les deux premiers du développement de

$$(1)\qquad 0 = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \ldots,$$

dans lequel a est une valeur approchée d'une racine de $f(x)$ et h la correction qu'il faut lui ajouter pour avoir la racine exacte $a+h$. Notre méthode permettra de voir si ces termes sont effectivement négligeables et de trouver une limite de l'erreur commise. De plus, il pourra arriver que le troisième terme ne soit pas négligeable, mais que les termes suivants le soient. C'est ce qui arrive quand l'équation a deux racines voisines de a. Dans ce cas, l'exposition classique de la méthode conduirait à en rejeter l'application. Cependant, les deux racines considérées seront données par une simple équation du second degré. De cette remarque résulte une manière avantageuse d'appliquer la méthode de Newton proprement dite. On examine quels sont, dans le développement (1), les termes négligeables à l'approximation qu'on se propose d'obtenir définitivement. Ce n'est qu'après avoir ainsi fortement abaissé le degré de l'équation qu'on applique la méthode de Newton proprement dite à l'équation simplifiée.

---

[1] *Bulletin scientifique* de M. Lebon, 20 juillet 1889.