NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAXIMILIEN MARIE

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 417-428

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__417_0>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge (¹).

Sommaire de la théorie du développement en série, par la formule de Taylor, d'une fonction implicite y, définie par une équation algébrique $f(x, y) = 0$.

1. Pour qu'une série à termes imaginaires soit convergente, il faut que la série des parties réelles de tous ses termes et la série de leurs parties imaginaires soient séparément convergentes, c'est-à-dire que, si le terme général est représenté par $A_u + B_u\sqrt{-1}$, il faut, pour que la série soit convergente, que A_u et B_u, et par conséquent $\sqrt{A_u^2 + B_u^2}$, tendent vers zéro.

2. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable, et dont tous les coefficients sont finis, est toujours convergente lorsque la variable ne prend que des valeurs dont le module soit suffisamment petit.

3. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable reste convergente lorsque le module de la variable reste, si peu que ce soit, inférieur à une certaine limite, et devient divergente lorsque le

(¹) *Voir* t. X, p. 373.

module de la variable dépasse, de si peu que ce soit, cette même limite. Lorsque le module de la variable atteint la limite en question, la série est convergente ou divergente, selon la valeur de la variable elle-même; mais la série, dans ce cas douteux, ne pourrait pas être utilisée comme étant trop peu convergente, si elle l'était; en sorte qu'il importe peu de savoir ce qu'il en est.

4. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable est convergente ou divergente, sauf les cas douteux, en même temps que toutes ses dérivées ou intégrales.

5. Si x_0 et y_0 sont deux valeurs, qui se correspondent, de la variable x et de la fonction y, définie par une équation algébrique $f(x,y) = 0$, la série

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x-x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

qui reste convergente tant que le module de $(x - x_0)$ reste suffisamment petit, mais à condition qu'aucun des coefficients différentiels $\left(\frac{dy}{du}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{du_2}\right)_0$, ... ne soit infini, définit l'ordonnée d'un lieu tel que, si aux deux équations $f(x,y) = 0$ d'une part et $y =$ la série, de l'autre, on adjoignait une même relation complémentaire quelconque $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta',) = 0$, les deux courbes déterminées, sur les deux lieux superficiels, par cette condition, auraient au point $[x_0, y_0]$ un contact d'ordre infini, c'est-à-dire se confondraient dans une étendue plus ou moins grande à partir du point $[x_0, y_0]$.

6. Les ordonnées des deux lieux superficiels

$$f(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \text{la série}$$

se confondront donc aussi dans un intervalle plus ou moins étendu, c'est-à-dire que la série fournira, dans un intervalle plus ou moins étendu, la valeur de la fonction y définie par l'équation $f(x,y)=0$.

7. Mais l'identité des deux fonctions ne sera jamais complète, d'abord parce que la série ne restera pas toujours convergente et que, devenue divergente, elle ne définirait plus aucune fonction ; en second lieu parce que la fonction y, définie par l'équation $f(x,y)=0$, aurait toujours m valeurs, pour toute valeur de x, si l'équation $f(x,y)=0$ était de degré m par rapport à y, tandis que la fonction définie par la série, supposée convergente, n'en aura jamais qu'une.

8. La série ne définira donc jamais qu'un segment de la fonction y, définie par l'équation $f(x,y)=0$, et l'identité des deux fonctions ne s'étendrait en tous cas que jusqu'aux valeurs de x telles que le module de $(x-x_0)$ restât assez petit pour que la série elle-même restât convergente.

9. Les solutions de l'équation $y=$ la série formeront plaque sur le tableau, comme celles de l'équation $f(x,y)=0$, mais la première plaque ne sera jamais qu'une portion de la seconde. Cette première plaque s'appellera la *région de convergence* et le lieu des points situés sur son contour s'appellera le *périmètre de la région de convergence.*

10. La valeur que ne devrait pas dépasser le module de $(x-x_0)$, pour que la série restât convergente, dépend, par rapport au lieu $f(x,y)=0$, du système des deux valeurs initiales x_0 et y_0 de x et de y. Si k est la valeur qui convient, en raison de la position du point origine $[x_0,y_0]$, le périmètre de la région de conver-

gence sera défini, quant aux abscisses de ses points, par la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = k^2,$$

et quant à ses ordonnées, par les deux équations contenues dans

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

auxquelles on joindrait les équations

$$x! = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

11. L'équation du périmètre de la région de convergence sera toujours algébrique, si l'on suppose algébrique l'équation $f(x, y) = 0$; mais la courbe représentée par cette équation fournirait beaucoup de branches parasites. Il faudrait en effet éliminer toutes celles de ces branches, en nombre $m - 1$, dont les ordonnées ne satisferaient pas à l'équation $y =$ la série.

12. Lorsqu'une fonction atteint une valeur infinie pour une valeur finie de sa variable, toutes ses dérivées deviennent aussi infinies; lorsqu'une des dérivées d'une fonction devient infinie, toutes les suivantes le deviennent aussi.

13. Un point d'un lieu où, soit l'ordonnée et ses dérivées, soit une des dérivées de l'ordonnée et toutes les suivantes, deviennent infinies, ne peut jamais se trouver dans l'intérieur de la région de convergence, puisque, dans l'hypothèse contraire, ou bien la série pourrait prendre une valeur infinie et rester convergente, ou bien ce serait une des dérivées de la série qui pourrait prendre une valeur infinie et rester convergente.

Mais il se trouvera toujours au moins un de ces points sur le périmètre de la région de convergence, parce que celles des dérivées de la fonction qui deviendraient infinies au delà de la région de convergence acquerront déjà, en deçà, des valeurs très grandes fournies encore par les dérivées correspondantes de la série primitive; et que la divergence ne pourra se produire, pour ces séries dérivées, qu'à l'instant où elles devraient acquérir des valeurs infinies.

Les séries dérivées, d'ordres moins élevés, tomberont alors dans le cas douteux et seront sur le point de devenir divergentes, comme on l'a dit plus haut, en ce sens seulement que le terme général n'y tendra plus vers zéro, ce qui ne veut pas dire que la somme d'un assez grand nombre des premiers termes croîtrait indéfiniment.

14. Les points particuliers dont il vient d'être question prennent le nom de *points critiques* du lieu en question. Les uns, comme les points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y, varient dans le lieu avec la direction de l'axe des y; les autres, au contraire, comme la plupart des points de rebroussement, restent fixes dans le lieu.

15. La première chose à faire pour préparer la discussion de la série suivant laquelle se développe l'ordonnée d'un lieu est de déterminer exactement tous les points critiques de ce lieu.

A cet égard, on remarquera d'abord que les dérivées d'une fonction ne peuvent devenir infinies, à partir d'un certain ordre, qu'aux points où cette fonction a acquis plusieurs valeurs égales.

On commencera donc par relever tous les points du lieu où plusieurs valeurs de l'ordonnée se confondraient.

Soient x et y les coordonnées de l'un d'eux et p son degré de multiplicité. Si les dérivées premières de ces p valeurs de y sont toutes finies et différentes, leurs dérivées d'ordres plus élevés resteront toutes finies et le point en question ne sera pas critique.

Si $p-q$ de ces dérivées se séparent des autres, sans devenir infinies, et ont des valeurs distinctes, le point considéré ne sera pas critique relativement aux formes correspondantes de la fonction y.

Si, sur les q dérivées restantes, $q-r$ se séparent des autres en devenant infinies, le point en question sera critique par rapport aux $q-r$ formes correspondantes de la fonction y.

On ne pourra encore rien dire relativement aux r dernières formes de la fonction, mais on les dérivera de nouveau jusqu'à ce que les dérivées ultérieures se séparent ou deviennent infinies, ce qui arrivera tôt ou tard, parce que, si les dérivées des ordonnées de quelques branches du lieu restaient indéfiniment confondues, ces deux branches auraient entre elles un contact d'ordre infini, ou se confondraient elles-mêmes, ce qui ne saurait arriver dans un lieu algébrique irréductible, comme on doit toujours supposer que soit le lieu en discussion.

16. Tous les points critiques du lieu étant ainsi déterminés, la question de la convergence de la série suivant laquelle l'ordonnée y du lieu aurait été développée, à partir d'un point origine $[x_0, y_0]$, non critique, se réduira à savoir lequel de tous les points critiques se trouvera sur le périmètre de la région de convergence et déterminera ce périmètre, ainsi que la région enveloppée.

La méthode à suivre pour résoudre cette question consistera à écarter successivement tous ceux des points critiques où ne pourrait pas se rendre un point mobile $[x, y]$, parti du point $[x_0, y_0]$, sans que le module de $[x-x_0]$ eût dû dépasser momentanément celui de la différence entre x_0 et l'abscisse d'un autre point critique $[x_1, y_1]$ où aurait pu se rendre d'abord le point $[x, y]$, pour parvenir au point essayé.

Le tableau dressé d'avance des deux enveloppes et de toutes les conjuguées, surtout de celles qui passeraient par les points critiques du lieu, facilitera singulièrement la solution de la question précédente, parce que, si, pour se rendre du point $[x_0, y_0]$ à un point critique $[x_n, y_n]$, le point $[x, y]$ devait forcément traverser la conjuguée qui passerait en un autre point critique $[x_1, y_1]$ et si, pouvant se rendre sur cette dernière conjuguée ou sur celle des enveloppes qui l'y toucherait, il pouvait s'approcher indéfiniment du point $[x_1, y_1]$ sans que le module de $(x - x_0)$ dépassât celui de $(x_1 - x_0)$, le point critique $[x_n, y_n]$ devrait évidemment être écarté en présence du point $[x_1, y_1]$, puisque la série serait déjà devenue divergente pour $x = x_1$.

On arrivera ainsi à déterminer sûrement le point d'arrêt de la convergence, sans autre difficulté que celle que présentera la complication de l'équation du lieu.

17. On s'aidera puissamment dans cette discussion en s'appuyant sur cette observation presque intuitive que, si le point $[x, y]$ peut, sans sortir de la région de convergence, se rendre sur une conjuguée tangente à l'enveloppe réelle, en un point critique, il ne pourra pas passer sur cette enveloppe et réciproquement. En effet, si $[x_1, y_1]$ est ce point critique, le module de $[x_0 - x_1]$ sera toujours compris entre les modules des différences entre x_0 et les abscisses de deux points pris l'un sur l'enveloppe et l'autre sur la conjuguée, à des distances infiniment petites du point $[x_1, y_1]$.

18. Si l'on déplaçait d'une manière continue le point origine $[x_0, y_0]$, la région de convergence se déformerait aussi d'une manière continue; le périmètre de cette ré-

gion pivoterait d'abord autour de l'ancien point d'arrêt, il viendrait, à un instant donné, passer par un nouveau point critique et abandonnerait ensuite le premier pour pivoter autour du second, et ainsi de suite.

19. J'ai nommé *courbe d'équilibre* entre deux points critiques le lieu sur lequel pourrait se déplacer le point origine $[x_0, y_0]$ sans que le périmètre de la région de convergence cessât de passer à la fois par ces deux points critiques.

La considération de ces courbes d'équilibre facilite singulièrement la fixation du point d'arrêt et ses déplacements intermittents, lors du déplacement continu du point origine.

20. Lorsque, en raison de la situation du point origine $[x_0, y_0]$ dans le lieu, le point $[x, y]$, parti de ce point, pourra, par des mouvements en sens contraires, se rendre indifféremment à l'un ou l'autre de deux points critiques, sans en dépasser d'autres, on appliquera la règle de Cauchy, c'est-à-dire qu'on prendra pour point d'arrêt celui des deux points critiques dont l'abscisse retranchée de x_0 donnerait le moindre module.

21. Soit d'abord pris pour exemple le lieu

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

les deux points critiques sont $[x = +a,\ y = 0]$ et $[x = -a,\ y = 0]$, où $\frac{dy}{dx}$ devient infini.

La courbe d'équilibre entre ces deux points est caractérisée par l'équation

$$(\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2 = (\alpha_0 + a)^2 + \beta_0^2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha_0 = 0;$$

c'est donc celle des conjuguées de l'ellipse qui la touche en ses sommets situés sur l'axe des y. Ainsi, si le point

$[x_0, y_0]$ appartient à cette conjuguée, le périmètre de la région de convergence passera à la fois par les deux sommets placés sur l'axe des x.

Pour que le point d'arrêt soit $[x = +a, y = 0]$, il faudra que α_0 et β_0 satisfassent à l'inégalité

$$(\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 + a)^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire que α_0 soit positif, ou que le point $[x_0, y_0]$ appartienne à une branche de conjuguée tangente à l'ellipse en un point du premier ou du quatrième quadrant.

Quelque part que le point $[x_0, y_0]$ soit placé sur le lieu, le point $[x, y]$ fourni par l'équation $y =$ la série (supposée convergente) ne pourra jamais traverser l'arc des x pour passer d'une des branches sur l'autre, de la courbe réelle ou de la conjuguée $c = \infty$, car autrement la série pourrait fournir deux valeurs de y pour une même valeur de x.

Cette remarque sera souvent utilisable. Dans tous les cas analogues, le point d'arrêt sera toujours un point de rebroussement pour le périmètre de la région de convergence.

Le point d'arrêt restant fixé au point $[x = +a, y = 0]$, c'est-à-dire α_0 restant positif, supposons qu'on veuille savoir si le point mobile $[x, y]$ pourra passer sur la courbe réelle ou sur la conjuguée $c = \infty$: il faudra pour cela remarquer que, pour que le point $[x, y]$ reste dans l'intérieur de la région de convergence, le module de $(x - x_0)$, ou

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2,$$

devra rester moindre que celui de $(a - x_0)$, ou

$$(a - \alpha_0)^2 + \beta_0^2.$$

mais que, si le point $[x, y]$ doit se trouver sur la courbe réelle ou sur la conjuguée $c = \infty$, β, alors, sera nul, ce qui réduira la condition précédente à

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (a - \alpha_0)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$\alpha^2 - 2\alpha_0\,\alpha + 2\,a\,\alpha_0 - a^2 < 0.$$

Les racines de l'équation à zéro de ce trinôme sont

$$\alpha_0 + (a - \alpha_0) \quad \text{et} \quad \alpha_0 - (a - \alpha_0),$$

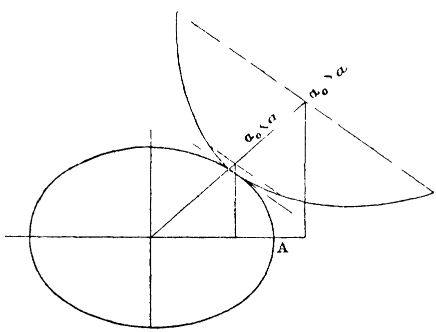
de sorte que, pour que le trinôme soit négatif, il faudra que α varie entre

$$\alpha_0 + (a - \alpha_0) \quad \text{et} \quad \alpha_0 - (a - \alpha_0);$$

si $\alpha_0 = a = h$, le maximum sera a et le minimum $a - 2h$; et si $\alpha_0 = a + h$, le minimum sera a et le maximum $a + 2h$.

Ainsi le point $[x, y]$, représenté par l'équation $y =$ la série, ne pourra jamais passer de la courbe réelle sur la conjuguée $c = \infty$ ou réciproquement.

Fig. 28.



Il pourra passer sur la courbe réelle si $\alpha_0 < a$, et sur la conjuguée $c = \infty$ si $\alpha_0 > a$ (*fig.* 28).

Si α_0 était égal à a, le périmètre de la région de convergence n'aurait que le point A de commun soit avec la courbe réelle, soit avec la conjuguée $c = \infty$.

On pourrait aisément construire le périmètre de la région de convergence pour une position donnée du point $[x_0, y_0]$, et déterminer la portion de chaque conjuguée dont les ordonnées pourraient être fournies par la série.

22. Considérons maintenant le lieu

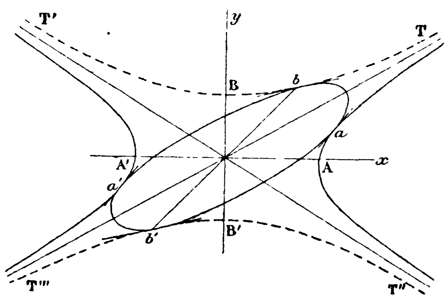
$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2 :$$

les points critiques sont

$$[x = + a, y = 0] \qquad \text{et} \qquad [x = - a, y = 0].$$

La courbe d'équilibre est caractérisée comme dans l'exemple précédent par la condition $\alpha_0 = 0$. Cette courbe

Fig. 29.



est l'enveloppe imaginaire des conjuguées, $TBT'T''B'T'''$, fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \beta'\sqrt{-1}$$

de l'équation du lieu (*fig.* 29).

Pour que le point d'arrêt soit le point A, il faut que $\alpha_0 > 0$, c'est-à-dire, si le point $[x_0, y_0]$ appartient à la conjuguée $bab'a'$, pour que le point d'arrêt soit le point A, il faut que le point $[x_0, y_0]$ soit placé sur la branche bab'.

23. Soit encore le lieu

$$a^2y^2 = b^2x^3 = -a^2b^2;$$

les deux points critiques sont

$$[x = \pm a\sqrt{-1}, y = 0];$$

la courbe d'équilibre est caractérisée par la condition

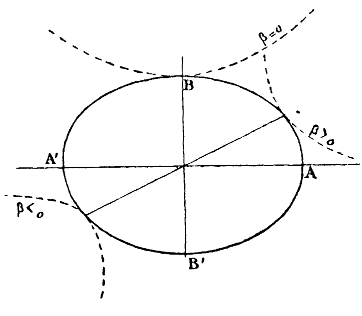
$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 = \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2$$

ou

$$\beta_0 = 0:$$

c'est la conjuguée à abscisses réelles, laquelle touche l'en-

Fig. 30.



veloppe imaginaire ABA'B' en ses sommets situés sur l'axe des y (*fig.* 30).

Pour que le point A soit le point d'arrêt, il faudra que

$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 < \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2$$

ou que β_0 soit positif; c'est-à-dire que le point origine se trouve sur une demi-conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de l'axe BAB'.

(*A suivre.*)