NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 37-59

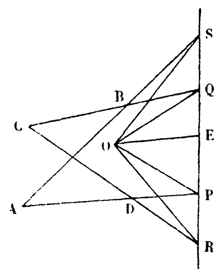
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__37_0>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (¹);

PAR M. L. MALEYX.

Soient encore les quatre points A, B, C, D (*fig.* 50), et supposons d'abord la tangente PQ située à distance finie; si E est l'un des points de contact de la courbe, il sera l'un des points doubles de l'involution déterminée par les couples de points P et Q, R et S. Unissant un point quelconque, O, du plan aux cinq points P, Q, R, S, E, le faisceau ainsi formé sera en involution et OE en sera un rayon double. Si PQ passe à l'infini, les quatre premiers rayons deviendront parallèles aux côtés du quadrilatère qu'ils rencontrent en P, Q, R, S, respective-

Fig. 50.



ment, et OE sera toujours l'un des rayons doubles du faisceau déterminé par ces parallèles; mais, comme OE rencontre la courbe en un second point à l'infini, il est parallèle à un des diamètres de la courbe et détermine cette direction; on est alors ramené au cas où l'on donne

(¹) Voir t. IX (1890), p. 596.

cinq points dont l'un est à l'infini dans une direction donnée. Comme le faisceau OPQRS a deux rayons doubles, il y a deux solutions.

La tangente peut passer à l'infini en même temps que l'un des points y passe dans une direction donnée.

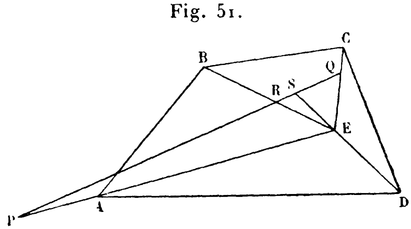
L'une des tangentes passant à l'infini, la courbe ne peut être qu'une parabole; on peut alors supposer que le point et le point de contact ont passé à l'infini dans la direction donnée, et l'on est ramené au cas où l'on donne cinq points dont deux ont passé à l'infini dans la même direction donnée.

Il n'y a pas de modification sensible à la construction générale, si *deux des quatre points passent à l'infini dans des directions données, la tangente restant à distance finie.*

3° *Construire une conique dont on donne quatre tangentes et un point.*

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD, DA les quatre tangentes données, E le point donné (*fig.* 51); unissons par des lignes droites

Fig. 51.



le point E aux quatre sommets du quadrilatère circonscrit. Si nous coupons la figure par une transversale quelconque PS, les couples de points de rencontre de cette droite avec les rayons EA et EC, EB et ED déterminent une involution dont font partie les points de rencontre de la même droite avec les deux tangentes issues du point E; mais, comme le point E appartient à la courbe, les deux tangentes qui en sont issues se confondent, et leurs points communs avec PS se réduisent à un qui est le point double de l'involution déterminée par P et Q, R et S. On déterminera donc un de ces points doubles, en l'unissant au point E par une droite; on aura une cinquième tangente et l'on sera ramené à un cas précédent. Comme l'involution a deux points doubles, il y a deux solutions.

La même construction s'applique encore *si le point* E *se transporte à l'infini dans une direction donnée*. Les quatre rayons EA, EB, EC, ED, devenant parallèles, la courbe correspondante peut être une hyperbole ou une parabole : dans le premier cas, la cinquième tangente sera une asymptote; dans le deuxième, cette cinquième tangente passe à l'infini; la courbe sera une parabole dont on connaît quatre tangentes; sa construction rentre dans un cas précédent.

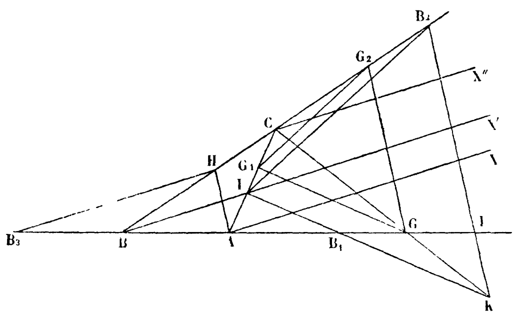
Si *une des tangentes* AD *passe à l'infini, le point* E *restant à distance finie,* la courbe ne peut être qu'une parabole, la construction continue à s'appliquer, deux des sommets A, D du quadrilatère circonscrit passant à l'infini dans les directions BA, CD.

Enfin, si *une des tangentes,* AD *par exemple, passe à l'infini, et que le point* E *passe également à l'infini dans une direction donnée,* la courbe ne peut être qu'une parabole; mais la construction ne s'applique plus, la cinquième tangente qu'elle détermine passant elle-même à l'infini. On peut alors traiter directement la question qui se réduit à *construire une parabole dont on donne trois tangentes et la direction des diamètres*.

Soient AB, BC, AC les trois tangentes (*fig.* 52), AX, BX′, CX″ les parallèles aux diamètres menées par les points A, B, C; prenons pour inconnues les points de contact.

La droite qui unit deux d'entre eux, ceux qui se trouvent sur les tangentes BA, AC par exemple, est divisée par AX en deux parties égales; dès lors sa direction est déterminée : il suffira pour l'obtenir de prendre sur BA

Fig. 52.



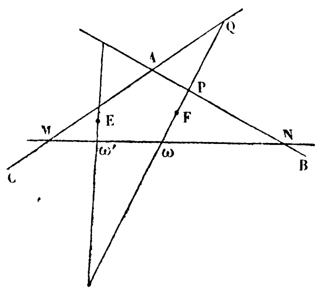
la longueur $AB_1 = AB$ et de joindre B_1I, I étant le point de rencontre de BX' avec AC; B_1I est parallèle aux cordes divisées par AX en deux parties égales.

On déterminera d'une manière analogue les directions des deux autres cordes de contact respectivement parallèles à IB_2, AH ou B_2L. La question se ramène alors à construire un triangle dont les côtés soient parallèles à IB_1, IB_2, B_2L, et dont les sommets reposent sur AB, BC, AC; les sommets de ce triangle seront les points de contact cherchés. Pour construire ce triangle, il suffit de prolonger IB_1, B_2L, jusqu'à leur rencontre en K, d'unir le point K au point C par une ligne droite coupant AB en G, puis de mener par ce point G les droites GG_1, GG_2, respectivement parallèles à IB_1, B_2L. Le triangle GG_1G_2 remplit les conditions de l'énoncé : le problème n'a qu'une solution.

4° *Construire une conique dont on donne trois points et deux tangentes.*

Desargues. — Soient AB, AC les deux tangentes données, E, F, G les trois points donnés (*fig.* 53) : considérons la droite MN qui unit les points de contact des deux tangentes AB, AC, comme formant avec elles, en la prenant doublement, un quadrilatère inscrit dans la conique. Les points G et F, qui appartiennent à la

Fig. 53.



courbe, et les points P et Q où la droite GF rencontre les côtés opposés AB, AC du quadrilatère inscrit déterminent une involution dont le point ω, où GF rencontre MN, est un des points doubles. En construisant les points doubles de cette involution déterminée, on aura deux points, tels que ω, ω_1, dont l'un se trouvera sur MN. Répétant le même raisonnement relativement à la transversale GE, on aura deux nouveaux points ω', ω'_1, dont l'un appartiendra à la droite MN. Cette droite peut donc avoir quatre positions déterminées, en associant deux à deux les points ω, ω_1 avec les points ω', ω'_1 ; à chaque position de la droite correspond une conique dont la construction se ramène à un cas précédent : la question a donc quatre solutions.

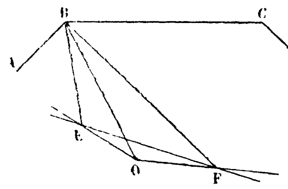
Dans les cas où quelques-uns des éléments donnés se transporteraient à l'infini, on raisonnerait comme dans les cas prédents.

5° *Construire une conique dont on donne trois tangentes et deux points.*

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD les trois tangentes données, E, F les deux points donnés (*fig.* 54); considérons les deux tangentes réduites à une en E, et les deux tangentes réduites à une en F, comme formant un quadrilatère circonscrit à la conique, ayant deux sommets opposés en E et F, et les deux autres sommets opposés confondus au point O où elles se coupent.

Les tangentes BA, BC, les deux rayons BE, BF déterminent un faisceau en involution dont BO est un rayon double; donc, en construisant les rayons doubles de cette

Fig. 54.



involution, déterminée par les quatre rayons connus, on aura deux droites BO, BO_1, dont l'une doit passer par le point de concours des tangentes en E et F.

En répétant le même raisonnement sur le faisceau déterminé par CB et CD, CE et CF, on obtiendra deux nouvelles droites issues de C' et dont l'une passera par le point O. En associant chacune des deux droites issues de B, et telles que BO, avec chacune de celles qui sont issues de C, dans les mêmes conditions, on obtiendra quatre points qui peuvent appartenir chacun à deux tangentes en E et F.

On pourra ainsi construire quatre systèmes de deux tangentes qui, associés chacun aux trois tangentes données, détermineront quatre coniques remplissant les conditions de l'énoncé.

Si un ou deux des éléments donnés passaient à l'infini, on raisonnerait comme dans les cas précédents.

XV. *Etant données deux coniques, chacune par cinq points,* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *pour la première,* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 *pour la deuxième, et admettant que ces deux coniques ont quatre points communs inconnus, on propose de construire une troisième conique passant par ces quatre points, et par un cinquième point donné* C.

Par le point C menons une transversale quelconque; d'après le théorème du n° VI, Chap. II, on pourra construire les deux points M et M_1, où elle rencontre la première conique, et les points N et N_1 où elle coupe la seconde; le point conjugué de C dans l'involution déterminée par les couples de points M et M_1, N et N_1, appartient à la troisième conique, d'après la généralisation du théorème de Desargues, n° VIII, Chap. II, et peut être construit.

On pourra déterminer ainsi autant de points qu'on voudra de la troisième conique, et la question est résolue.

XVI. *Deux coniques ont deux points communs* A_1, A_2 *donnés; en outre on donne trois autres points de chacune d'elles* A_3, A_4, A_5 *pour la première,* A'_1, A'_2, A'_3 *pour la deuxième : on demande de construire leurs deux autres points communs.*

Coupant la figure par une transversale, d'après le théorème du n° VI, Chap. II, on pourra construire les points M et M_1, N et N_1, où elle rencontre les deux coniques qui sont chacune définies par cinq points. Si P est le point où la même droite rencontre la droite $A_1 A_2$, le point conjugué Q dans l'involution déterminée par les couples de points M et M_1, N et N_1 appartient à la droite qui unit les deux points inconnus (*Gén. du th. de Desargues*, n° VIII, Chap. II).

On pourra construire ce point Q, et de la même manière déterminer un second point Q_1 de la droite unissant les points inconnus. Il ne restera plus qu'à trouver les points communs de la droite QQ_1 avec l'une des coniques données, ce qui se fera par l'application du théorème établi au n° VI, Chap. II.

XVII. *Une section plane d'un cône ayant pour directrice une conique est aussi une section conique.*

En effet, si l'on prend le sommet du cône comme point de vue, la section peut être considérée comme une perspective de la directrice.

Comme les théorèmes de Desargues et de Pascal sont projectifs et s'appliquent à la directrice, on pourra construire tous les points de cette ligne par leur application et au moyen de cinq d'entre eux; mais on pourra aussi construire tous les points de la section par l'application des mêmes théorèmes aux points correspondants de cette section. Il en résulte que tous les points de la section appartiennent à la conique qui passe par les cinq premiers et qui est déterminée, et qu'en conséquence cette section est une conique.

CHAPITRE III.

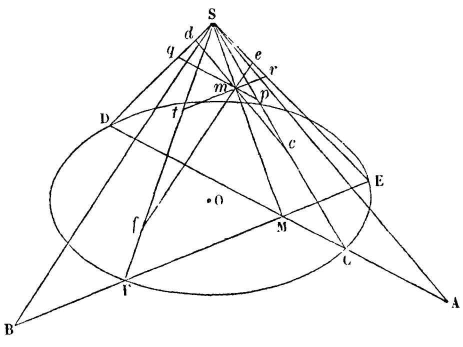
THÉORÈMES DIVERS ET APPLICATIONS.

Théorème de Newton et conséquences.

I. Théorème de Newton. — *Si par un point du plan d'une section conique on mène deux sécantes parallèles à deux directions données, parallèles à ce plan, le rapport du produit des deux segments déterminés par la courbe sur l'une des sécantes au produit des segments déterminés sur l'autre est un nombre constant indépendant de la position du point.*

Soient O le cercle directeur, S le sommet du cône (*fig.* 55); menons par le sommet du cône les deux

Fig. 55.



droites SA, SB, respectivement parallèles aux deux directions données, et limitées en A et B au plan de la base circulaire, le plan ASB sera parallèle au plan sécant.

Par le point m, pris arbitrairement dans le plan sécant, menons dc, ef respectivement parallèles à SA, SB, puis faisons passer un plan par SA et dc, et un autre par SB et ef; le premier de ces plans coupera le cône suivant les génératrices SC, SD, le deuxième suivant SE, SF; ils se couperont entre eux suivant la droite SM.

Traçons ensuite pmq parallèle à DC et rmt parallèle à EF. De la similitude des triangles mdq, DSA, on déduit

$$\frac{md}{mq} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}},$$

et de celle des triangles $\mathrm{S}mq$, SMD

$$\frac{mq}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}};$$

d'où, multipliant membre à membre,

$$\frac{md}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AD}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

On trouve de même, par la considération des couples de triangles semblables, mpc, CSA, $\mathrm{S}mp$, CSM,

$$\frac{mc}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

En multipliant membre à membre les deux dernières

$$\frac{mc \times md}{\mathrm{MC} \times \mathrm{MD}} = \frac{\overline{\mathrm{SA}}^2}{\mathrm{AC} \times \mathrm{AD}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

Répétant des calculs analogues sur les triangles semblables : $\mathrm{S}mt$, SMF, et mtf, SBF; puis sur les deux autres couples de triangles semblables : $\mathrm{S}mr$, SME, et *mer*, BSE, on en déduit

$$\frac{me \times mf}{\mathrm{ME} \times \mathrm{MF}} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

Divisant membre à membre les deux dernières égalités, en remarquant que, d'après les propriétés des sécantes au cercle, MC $\times$ MD $=$ ME $\times$ MF, on trouve

$$\frac{mc \times md}{me \times mf} = \left(\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SB}}\right)^2 : \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{AD}}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}}.$$

Le second membre est constant et le théorème est démontré.

La *fig.* 55 suppose les points A et B en dehors du cercle directeur, ce qui arrive toujours quand la conique est une ellipse ou une parabole, exceptant dans ce dernier cas celui où l'une des directions données serait parallèle aux diamètres, et que nous examinerons à part à la fin du présent numéro.

Dans le cas de l'hyperbole, l'un ou les deux points A ou B peuvent être intérieurs au cercle directeur, si les directions SA, SB correspondent à des cordes rencontrant les deux branches; la démonstration se fait de la même manière et conduit au même résultat.

Conservons dans la *fig.* 56 les notations de la *fig.* 55, et aussi les mêmes hypothèses, sauf que SA est une direction intérieure au lieu d'être extérieure comme dans la figure précédente.

Des deux triangles mdq, DSA, sont toujours semblables et donnent

$$\frac{md}{mq} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}};$$

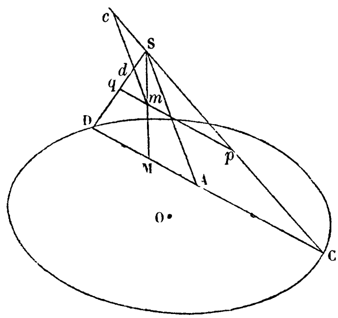
il en est de même des triangles Smq, SDM, d'où l'on déduit

$$\frac{mq}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

Multipliant membre à membre,

$$\frac{md}{MD} = \frac{AS}{AD} \times \frac{Sm}{SM}.$$

Fig. 56.



Considérons encore les deux couples de triangles semblables, mpc, ASC, et Smp, SMC, on en tire

$$\frac{mc}{MC} = \frac{AS}{AC} \times \frac{Sm}{SM}.$$

Multipliant membre à membre les deux dernières égalités, on a

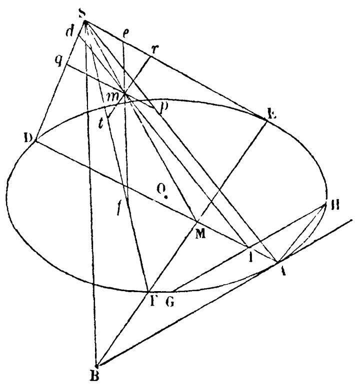
$$\frac{md \times mc}{MD \times MC} = \frac{\overline{SA}^2}{AD \times AC} \times \left(\frac{Sm}{SM}\right)^2.$$

La démonstration s'achève comme dans le cas précédent, que la direction SB soit intérieure ou extérieure.

Il nous reste à examiner ce qui advient dans le cas de la parabole, et si l'une des directions, soit SA, est parallèle aux diamètres; dans ce cas SA est située sur la surface du cône, et SB est contenue dans le plan tangent suivant SA (*fig.* 57).

Le plan de la parabole est parallèle au plan tangent BSA, et coupe le plan de la directrice suivant GH parallèle à AB. Par un point m du plan de la section menons les droites dmI, emf, respectivement parallèles à SA, SB; puis encore rmt, pmq, respectivement parallèles

Fig. 57.



aux traces BFE, DA des plans S$\mathrm{B}m$, S$\mathrm{A}m$ sur le plan de la directrice.

Ces deux plans S$\mathrm{B}m$, S$\mathrm{A}m$ coupent le cône suivant les couples de génératrices SE, SF, et SA, SD; de plus ils se coupent entre eux suivant SmM.

La trace I de la droite dmI, intersection du plan de la courbe et du plan S$\mathrm{A}m$, sur le plan de la directrice, se déplace sur la trace GH du plan de la section sur le plan du cercle de base.

De la similitude des triangles dmq, SAD, on déduit

$$\frac{md}{mq} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}};$$

de celle des triangles Sqm, SDM, on tire

$$\frac{mq}{\mathrm{DM}} = \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}};$$

multipliant membre à membre, on a

$$\frac{md}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

De la considération des triangles semblables $\mathrm{S}mp$, SMA, et observant que $mp = \mathrm{AI}$, comme côtés opposés d'un parallélogramme, on déduit

$$\frac{mp}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}};$$

multipliant membre à membre,

$$\frac{md \times \mathrm{AI}}{\mathrm{MD} \times \mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

On trouve, comme dans les cas précédents et par la considération des mêmes triangles,

$$\frac{me \times mf}{\mathrm{ME} \times \mathrm{MF}} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BF} \times \mathrm{BE}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

Divisant membre à membre et observant que

$$\mathrm{MD} \times \mathrm{MA} = \mathrm{ME} \times \mathrm{MF},$$

on a

$$\frac{me \times mf}{md \times \mathrm{AI}} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}} \times \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{SA}}$$

ou

$$\frac{me \times mf}{md} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}} \times \frac{\mathrm{AD} \times \mathrm{AI}}{\mathrm{SA}}.$$

Or le produit $\mathrm{AD} \times \mathrm{AI}$ est constant et égal à $\overline{\mathrm{AH}}^2$; le second membre est donc constant, et l'on a

$$\frac{me \times mf}{md} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}} \times \frac{\overline{\mathrm{AH}}^2}{\mathrm{SA}},$$

c'est-à-dire que, *dans la parabole, le point commun* *d'une corde de direction fixe avec un diamètre partage cette corde en deux segments dont le produit est au segment du diamètre compris entre le même point et la courbe dans un rapport constant.*

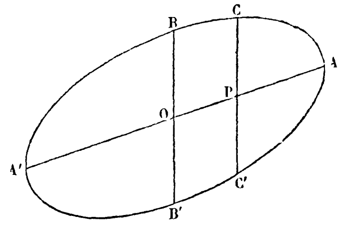
II. — Propriétés métriques des demi-cordes parallèles, ou ordonnées d'une section conique, par rapport aux segments qu'elles déterminent sur le diamètre qui les divise en parties égales. Équations des coniques à centre rapportées à deux diamètres conjugués. Équation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Les propriétés que nous avons l'intention d'établir dans le présent numéro sont des conséquences immédiates du théorème de Newton que nous venons de démontrer.

Considérons séparément les trois courbes.

Ellipse. — Soit l'ellipse O (*fig.* 58); AA′, BB′ deux diamètres conjugués dont nous supposerons les demi-

Fig. 58.



longueurs respectivement représentées par a' et b'; CC′ une corde parallèle à BB′, et divisée en deux parties égales par son point de rencontre P avec AA′.

D'après le théorème de Newton, le rapport $\dfrac{PC \times PC'}{PA \times PA'}$

conserve une même valeur constante quand le point P se déplace sur AA′; en conséquence, on a, pour tous les points de la courbe,

$$\frac{PC \times PC'}{PA \times PA'} = \frac{OB \times OB'}{OA \times OA'},$$

ou

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Donc : *le carré d'une demi-corde, ou ordonnée, qui se déplace en conservant sa direction, est au produit des segments qu'elle détermine sur le diamètre conjugué dans un rapport constant.*

Si l'on désigne, d'une façon générale, cette ordonnée par y, et par x le nombre positif ou négatif représentant OP, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{y^2}{(a'-x)(a'+x)} = \frac{b'^2}{a'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1;$$

c'est l'équation cartésienne de la courbe rapportée aux deux diamètres conjugués AA′, BB′.

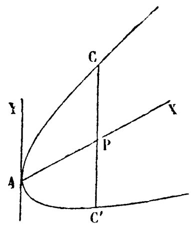
Parabole. — Soit une parabole dont le diamètre AX divise en parties égales les cordes telles que CC′, parallèles à la tangente AY (*fig.* 59); d'après la fin du numéro précédent, on sait que, lorsque la corde CC′ se déplace parallèlement à elle-même, le rapport $\frac{PC \times PC'}{AP}$ est constant; et, comme le point P où CC′ rencontre le diamètre conjugué de sa direction en est le point milieu, cette égalité peut se mettre sous la forme $\frac{\overline{CP}^2}{AP} = 2p'$, p' étant un nombre représentant une longueur fixe.

Désignant, d'une façon générale, CP par y et AP par x, l'équation précédente, qui a lieu pour tous les points de la courbe, peut s'écrire

$$y^2 = 2p'x,$$

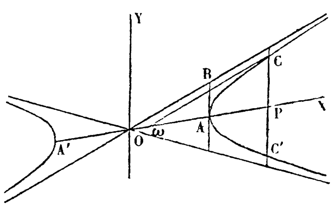
équation cartésienne de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité.

Fig. 59.



HYPERBOLE. — Soient enfin l'hyperbole O (*fig.* 60), CC' une corde variable parallèle à OY, OX le diamètre

Fig. 60.



conjugué de sa direction; d'après le théorème de Newton et pour tous les points de la courbe, le rapport $\frac{PC \times PC'}{PA \times PA'}$ a une valeur constante, et il en est de même de $\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'}$, puisque $PC = PC'$.

Cherchons à déterminer la valeur de ce rapport : dans ce but menons, par le point C, Cω parallèle à l'asymptote OB; nous avons immédiatement

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \frac{\overline{PC}^2}{(P\omega - \omega A)(P\omega + \omega A')}$$
$$= \frac{\left(\frac{PC}{P\omega}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega A}{P\omega}\right)\left(1 + \frac{\omega A'}{P\omega}\right)}.$$

Si le point C s'écarte indéfiniment de l'origine, la droite Cω se rapproche indéfiniment de l'asymptote, et le point ω du point O; il en résulte que ωA et ωA' restent finis, et que leurs rapports à Pω ont pour limite zéro; de plus, si nous représentons les longueurs OA, AB, par a', b' respectivement, on déduit de la similitude des triangles ωPC, OAB l'égalité

$$\frac{PC}{P\omega} = \frac{b'}{a'};$$

d'où

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \lim \frac{\left(\frac{PC}{P\omega}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega A}{P\omega}\right)\left(1 + \frac{\omega A'}{P\omega}\right)} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Donc *le carré d'une demi-corde, ou ordonnée, qui se déplace en conservant sa direction, est au produit des segments qu'elle détermine sur le diamètre conjugué, que la figure suppose rencontrer réellement la courbe, dans un rapport constant.*

Si l'on représente, d'une manière générale, cette ordonnée par y et par x le nombre positif ou négatif représentant le segment OP, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{y^2}{(x - a')(x + a')} = \frac{b'^2}{a'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

C'est l'équation cartésienne de la courbe rapportée aux deux diamètres conjugués OX, OY.

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{x^2}{y^2+b'^2}=\frac{a'^2}{b'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{(y+b'\sqrt{-1})(y-b'\sqrt{-1})}=\frac{a'^2}{b'^2};$$

d'où l'on peut conclure que *le carré d'une demi-corde qui se déplace parallèlement à une direction fixe, et dont le diamètre conjugué ne rencontre pas réellement la courbe, est au produit des segments qu'elle détermine sur ce diamètre dans un rapport constant,* A CONDITION DE CONSIDÉRER LES EXTRÉMITÉS DE CE DIAMÈTRE COMME DISTANTES DU CENTRE DES LONGUEURS IMAGINAIRES REPRÉSENTÉES PAR $\pm b'\sqrt{-1}$.

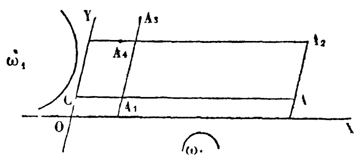
III. *Construire une conique dont on donne un point réel et quatre points réels ou imaginaires définis par les couples de points où deux droites données rencontrent une ou deux coniques.*

Remarquons d'abord que, d'après le théorème établi au n° VI, Chap. II, on peut remplacer les points communs réels ou imaginaires d'une conique définie et d'une droite donnée par ceux de la même droite et d'un cercle qu'on peut construire; d'après cela, on peut considérer les quatre derniers points donnés comme situés par couples sur les deux droites données et deux cercles donnés.

Soit donc à construire la conique passant par le point réel donné, A, et par les couples de points de rencontre des droites données OX, OY, avec les cercles donnés ω, ω_1 respectivement (*fig.* 61).

Menons par le point A la parallèle à OX rencontrant OY en C, et soit A_1 son second point de rencontre avec la courbe; d'après le théorème de Newton, le rapport

Fig. 61.



du produit $CA \times CA_1$ à celui des segments interceptés sur OY entre le point C et les points où cette droite rencontre le cercle ω_1, ce dernier produit étant égal à la puissance, π, du point C par rapport au cercle ω_1, est égal au rapport des puissances P et P_1 du point O par rapport aux cercles ω et ω_1 respectivement.

On aura donc l'égalité

$$\frac{CA_1 \times CA}{\pi} = \frac{P}{P_1},$$

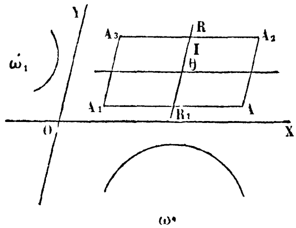
d'où l'on pourra déduire une construction du point A_1.

On pourra déterminer par une construction analogue le point A_2 où la parallèle à OY menée par A rencontre de nouveau la courbe; puis encore les seconds points de rencontre avec la courbe des parallèles menées à OY et OX par les points A_1 et A_2, soient ces points A_3 et A_4; connaissant cinq points réels de la courbe, elle est définie et peut être construite.

Remarque. — La construction précédente ne pourrait se terminer de la même manière s'il arrivait que les points A_3 et A_4 se confondissent; dans ce cas OX et OY seraient parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe, diamètres qu'on pourrait construire en menant des parallèles à OY, OX par les points milieux des cordes AA_1, AA_2; on connaîtrait alors le centre et l'on pourrait construire la longueur de ces diamètres d'après le théorème de Newton, ainsi qu'il suit.

Conservons dans la *fig.* 62 les notations de la *fig.* 61, supposant A_3 et A_4 confondus en A_3, et soient R et R_1

Fig. 62.



les extrémités du diamètre parallèle à OY. On a, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{IR \times IR_1}{IA_2 \times IA_3} = \frac{\overline{\theta R}^2 - \overline{\theta I}^2}{\overline{IA}_2^2} = \frac{P_1}{P},$$

P_1 et P étant toujours les puissances du point O par rapport aux cercles ω_1 et ω; la dernière égalité permet de construire θR et, en conséquence, les points R et R_1.

Examinons enfin *le cas où les droites données sont parallèles.*

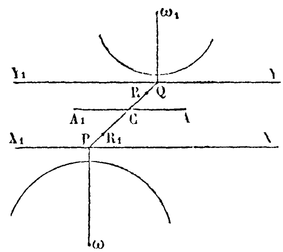
Proposons-nous de faire passer une conique par le point réel A, et par les points imaginaires où les cercles ω, ω_1 rencontrent les droites parallèles X_1X, Y_1Y respectivement (*fig.* 63).

Les points milieux des cordes interceptées dans la courbe cherchée sur les droites X_1X, Y_1Y sont placés aux pieds P et Q des perpendiculaires abaissées des centres ω, ω_1 des cercles donnés sur les deux droites données.

PQ est donc le diamètre de la courbe divisant en parties égales les cordes parallèles à X_1X; en menant par

A la parallèle à X_1X et en la prolongeant au delà de son point de rencontre C avec PQ d'une longueur $CA_1 = CA$, le point A_1 sera un nouveau point de la courbe. Désignons par R et R_1 les extrémités du diamètre PQ et par

Fig. 63.



P et P_1 les puissances des points P et Q par rapport aux cercles ω, ω_1 respectivement : nous aurons, par application du théorème de Newton,

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{PR \times PR_1}{P} = \frac{QR \times QR_1}{P_1}$$

ou

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{(PC + CR)(PC - CR_1)}{P} = \frac{(QC - CR)(QC + CR_1)}{P_1}$$

ou encore

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{\overline{PC}^2 + PC(CR - CR_1)}{P + \overline{CA}^2} = \frac{\overline{QC}^2 - QC(CR - CR_1)}{P_1 + \overline{CA}^2}.$$

Au moyen de la dernière égalité, on peut construire $CR - CR_1$, puis au moyen de la première un carré équivalent à $CR \times CR_1$; et, d'après un problème dont la solution est connue, on pourra construire CR et CR_1. Connaissant le diamètre RR_1 de grandeur et de position, on aura le centre : on pourra alors construire le diamètre conjugué qui est parallèle à $\mathbf{X_1X}$, et l'on aura sa longueur désignée par b' d'après l'égalité

$$\frac{4b'^2}{\overline{RR_1}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{CR \times CR_1},$$

qui se déduit du théorème de Newton.

(*A suivre.*)