NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. BRILL

Note sur l'application de transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 362-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__362_1>

NOTE SUR L'APPLICATION DE TRANSFORMATIONS DE CONTACT A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. J. BRILL,
Saint-John's College Cambridge.

1. Dans ce qui va suivre je me bornerai à la considération des transformations de contact de l'espace ponctuel à trois dimensions, et je ferai des applications aux équations aux dérivées partielles du second ordre qui contiennent une variable dépendante et deux variables indépendantes.

Considérons, d'abord, le cas où il y a une seule relation entre les coordonnées de points appartenant aux deux espaces corrélatifs, et supposons que cette relation soit de la forme

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Si l'on suppose que x_1, y_1, z_1 dépendent d'un seul paramètre, le point (x_1, y_1, z_1) décrit une courbe, et la surface correspondante de l'autre espace enveloppe une surface. L'équation de cette dernière surface sera une intégrale particulière d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Cette équation sera de la même forme pour toutes les surfaces du premier espace qui correspondent à des courbes du deuxième espace. De l'autre part, si l'on fait le point (x, y, z) décrire des courbes, on obtiendra des surfaces dans l'autre espace dont les équations satisfont à une autre équation aux dérivées partielles du second ordre. En plusieurs cas ces deux équations seront de la même forme. Nous parlerons pour convenance des surfaces dont les équations satisfont à ces deux équations différentielles comme surfaces des types (A) et (B) respectivement.

Imaginons, par exemple, que l'on considère la transformation de contact la plus simple et la meilleure connue, la méthode de transformation par polaires réciproques. On obtient l'équation générale des surfaces développables

$$rt - s^2 = 0.$$

Si l'on considère la transformation donnée par l'équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2,$$

qui transforme une surface en une surface parallèle, on obtient l'équation générale des surfaces canaux

$$a^2(rt - s^2) + a\sqrt{1 + p^2 + q^2} \\ \times [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Considérons maintenant le cas où il existe deux relations entre les coordonnées de points appartenant aux deux espaces corrélatifs

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$
$$\Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Dans ce cas, si l'on fait le point (x_1, y_1, z_1) décrire une courbe, la courbe correspondante de l'autre espace décrit une surface dont l'équation satisfait à une équation différentielle du second ordre. Par exemple, si l'on considère la transformation donnée par les équations

$$z + z_1 + xx_1 = 0, \qquad y - y_1 = 0,$$

on obtient l'équation générale des surfaces gauches à plan directeur

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Dans ce cas aussi nous parlerons des surfaces appartenant au premier ou au deuxième espace, qui correspondent à des courbes de l'autre espace, comme surfaces du type (A) ou du type (B) respectivement.

2. Maintenant je me propose de montrer comment on peut faire usage d'une transformation de contact pour obtenir une intégrale de quelqu'une des équations différentielles associées du second ordre, qui satisfait à des conditions aux limites données. On peut indiquer les espèces de conditions aux limites auxquelles on peut faire l'application de cette méthode comme il suit. On peut demander d'obtenir une surface qui satisfait à l'équation différentielle donnée et (*a*) qui passe par deux courbes données, (*b*) qui touche deux surfaces données, et (*c*) qui passe par une courbe donnée et touche une surface donnée. Pour les autres formes de conditions

aux limites on aurait besoin en général d'une autre espèce de transformation.

Supposons, d'abord, que l'on demande une intégrale de l'équation différentielle appartenant au premier espace, qui satisfait à des conditions aux limites de l'espèce (a). On doit chercher une surface du type (A) passant par deux courbes données. Correspondantes à ces deux courbes, on obtiendrait deux surfaces du type (B) dans le second espace. Ces surfaces se couperaient en une courbe. Correspondante à cette troisième courbe, on aurait une surface du type (A) dans le premier espace passant par les deux courbes données.

Considérons maintenant les conditions aux limites de l'espèce (b). Les corrélatives des deux surfaces données seraient deux surfaces dans le second espace. La corrélative dans le premier espace de la courbe en laquelle ces surfaces se coupent serait une surface du type (A) touchant les deux surfaces données.

On peut obtenir une solution du troisième cas d'après la même manière. A la surface donnée correspond une surface, et à la courbe donnée correspond une surface du type (B). La corrélative de la courbe en laquelle ces deux surfaces se coupent est la surface demandée.