NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CARVALLO

Sur une généralisation du théorème des projections

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 345-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__345_1>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DES PROJECTIONS;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème des projections. Elle est bien connue, très employée en Mécanique pour évaluer le travail d'une force, et pourtant elle est généralement omise dans les cours de Mathématiques spéciales. Serait-elle donc de peu d'usage en Trigonométrie et en Géométrie analytique? Je veux montrer ici qu'au contraire, dans les deux cas, elle peut rendre de grands services et simplifier beaucoup les démonstrations. Il me suffira de prendre un exemple simple dans chacune de ces matières. Voici d'abord l'énoncé :

2. THÉORÈME. — *Si deux segments* A *et* B *sont les résultantes de plusieurs autres,* A_1, A_2, A_3, ..., B_1, B_2, B_3, ..., *le produit des valeurs algébriques de ces segments par le cosinus de l'angle des axes sur lesquels ils sont comptés est égal à la somme des produits qu'on*

obtient en combinant toutes les composantes du premier segment avec toutes les composantes du second.

Ce théorème est une conséquence si évidente et si bien connue du théorème des projections que je me dispense de le démontrer. On le représente commodément par la formule

$$(A_1 + A_2 + \ldots) \mid (B_1 + B_2 + \ldots) = \Sigma A_i \mid B_j, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots),$$

en désignant par $A_1 + A_2, \ldots$ la résultante A, et par $A \mid B$ le produit des deux segments par le cosinus de leur angle. Cette formule est très mnémonique, étant identique à celle de la multiplication algébrique d'une somme par une somme.

3. Première application. — *Distance d'un point à l'origine.* — Soient X, Y, Z les vecteurs qui forment les trois composantes de OM sur les trois axes Ox, Oy, Oz; soient x, y, z leurs valeurs algébriques, λ, μ, ν les angles des axes yOz, zOx, xOy. On a

$$\begin{aligned}\overline{OM}^2 = OM \mid OM &= (X + Y + Z) \mid (X + X + Z) \\ &= X \mid X + Y \mid Y + Z \mid Z + 2Y \mid Z + 2Z \mid X + 2X \mid Y \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &\quad + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu.\end{aligned}$$

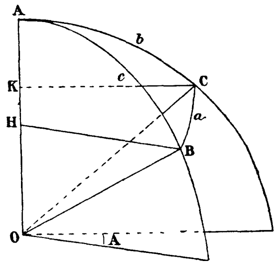
4. Deuxième application. — *Formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Soient le triangle sphérique ABC, O le centre de la sphère. Je dois évaluer $\cos a = OB \mid OC$. Pour cela, je décompose le segment OB en deux autres, OH et HB, savoir :

OH $=\cos c$ suivant OA,

HB $=\sin c$ suivant la perpendiculaire à OA, dans le plan AOB.



Je décompose de même OC suivant OK et KC. J'aurai

$$
\begin{aligned}
\cos a &= \mathrm{OB} \mid \mathrm{OC} \\
&= (\mathrm{OH}+\mathrm{HB}) \mid (\mathrm{OK}+\mathrm{KC}) \\
&= \mathrm{OH} \mid \mathrm{OK} + \mathrm{OH} \mid \mathrm{KC} + \mathrm{HB} \mid \mathrm{OK} + \mathrm{HB} \mid \mathrm{KC} \\
&= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A}.
\end{aligned}
$$

C. Q. F. D.