E. CARVALLO

# Multiplication des déterminants

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 10 (1891), p. 341-345

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__341_0>

# MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS (¹);

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. PROBLÈME. *Représenter le produit de deux déterminants d'ordres m et n par un déterminant d'ordre* $m+n$. — Considérons les déterminants des deux systèmes

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3, \\ y_2 = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3, \\ y_3 = a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y_4 = a_4^4 x_4 + a_4^5 x_5, \\ y_5 = a_5^4 x_4 + a_5^5 x^5. \end{cases}$$

On a, d'après la définition que j'ai donnée des déterminants (¹),

$$(1')\qquad [y_1 y_2 y_3] = \frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]} [x_1 x_2 x_3],$$

$$(2')\qquad [y_4 y_5] = \frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]} [x_4 x_5],$$

et en opérant la *multiplication extérieure* sur les deux membres de ces égalités,

$$(3)\qquad [y_1 y_2 y_3 y_4 y_5] = \frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]} \frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]} [x_1 x_2 x_3 x_4 x_5].$$

Cette formule exprime que le produit des deux déterminants $\frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]}$, $\frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]}$, définis par les systèmes (1)

(¹) Cet article fait suite à celui que j'ai publié récemment (*Nouv. Ann.*, 3ᵉ série, t. X; mai 1891).

et (2), est égal au déterminant unique du cinquième ordre $\frac{[y_1 y_2 y_3 y_4 y_5]}{[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]}$ qu'on obtient en regardant (1) et (2) comme formant un système unique de cinq fonctions $y$ à cinq variables $x$.

*Remarque.* — Si dans les seconds membres du système (2), par exemple, on introduit des termes en $x_1$, $x_2$, $x_3$, ceux-ci donneront dans la formule (2′) de nouveaux termes en $[x_1 x_2]$, ..., etc.; mais, dans la multiplication de (1′) et (2′), ces termes disparaîtront. La formule (3) subsiste. On peut donc, dans le déterminant $\frac{[y_1 y_2 y_3 y_4 y_5]}{[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]}$ de cette formule, introduire des éléments arbitraires dans les colonnes 1, 2, 3 des lignes 4, 5 [1].

2. Problème. *Représenter le produit de deux déterminants de même ordre par un déterminant de même ordre.* — Soient A et B les valeurs des déterminants des deux systèmes

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3, \\ y_2 = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3, \\ y_3 = a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} z_1 = b_1^1 y_1 + b_1^2 y_2 + b_1^3 y_3, \\ z_2 = b_2^1 y_1 + b_2^2 y_2 + b_2^3 y_3, \\ z_3 = b_3^1 y_1 + b_3^2 y_2 + b_3^3 y_3. \end{cases}$$

[1] L'expression du théorème avec ces éléments arbitraires $\lambda$ et dans la notation usuelle est celle-ci :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & 0 & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & 0 & 0 \\ \lambda_4^1 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ \lambda_5^1 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}.$$

On a, d'après ma définition des déterminants,

$$[y_1 y_2 y_3] = \mathrm{A}.[x_1 x_2 x_3], \qquad [z_1 z_2 z_3] = \mathrm{B}.[y_1 y_2 y_3].$$

et par suite

$$(3) \qquad [z_1 z_2 z_3] = \mathrm{B}.\mathrm{A}.[x_1 x_2 x_3].$$

Cette formule montre que le produit B.A est égal à la valeur C du déterminant obtenu en exprimant les $z$ en fonction des $x$. Il suffit de remplacer, dans les formules (2), les $y$ par leurs valeurs (1). L'élément qui est à la ligne $p$ et à la colonne $q$ de ce nouveau déterminant C est visiblement le coefficient de $x_q$ dans l'expression de $z_p$. C'est

$$(4) \qquad c_p^q = b_p^1 a_1^q + b_p^2 a_2^q + b_p^3 a_3^q.$$

*Remarques.* — 1° La méthode s'étend au produit de plusieurs déterminants.

2° Elle ne suppose pas qu'on ait le même nombre de variables dans les formules (1) et (2). Si, par exemple, les formules (1) donnent seulement $y_1$, $y_2$ en fonction de $x_1$, $x_2$, $x_3$; si, de plus, les formules (2) donnent $z_1$, $z_2$, $z_3$ en fonction de $y_1$, $y_2$, la méthode montre que le déterminant C est nul.

3° Le théorème s'exprime intuitivement par la formule $\frac{[z_1 z_2 z_3]}{[x_1 x_2 x_3]} = \frac{[z_1 z_2 z_3]}{[y_1 y_2 y_3]} \frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]}$. On reconnaît le théorème des fonctions de fonctions pour les dérivées et les déterminants fonctionnels.

3. Déterminants réciproques. — Je suppose que dans le système (2) (n° 2), $b_p^q$ soit égal au déterminant mineur de l'élément $a_q^p$. Le déterminant B est alors appelé le *réciproque* du déterminant A [1]. La formule (4) offre alors

[1] Salmon, *Leçons d'Algèbre superieure.*

deux cas. Si $q = p$, $c_p^p = b_p^1 a_1^p + b_p^2 a_2^p + b_p^3 a_3^p$ représente le développement du déterminant A suivant les éléments de la colonne $p$. Si $q$ est différent de $p$, $c_p^q$ est le développement du même déterminant où l'on a remplacé la colonne $p$ par la colonne $q$. Ce nouveau déterminant est nul comme ayant deux colonnes identiques. Ainsi, le déterminant C se réduit aux éléments de la première diagonale et l'on a

$$z_1 = \mathrm{A}x_1, \qquad z_2 = \mathrm{A}x_2, \qquad z_3 = \mathrm{A}x_3. \tag{5}$$

On en conclut $\mathrm{C} = \mathrm{A}^3$. Plus généralement, s'il s'agit de déterminants d'ordre $n$, on a $\mathrm{C} = \mathrm{A}^n$, et, en remplaçant C par sa valeur BA,

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}^{n-1}. \tag{6}$$

D'autre part, si l'on porte les valeurs (5) dans les formules (2), on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}x_1 &= b_1^1 y_1 + b_1^2 y_2 + b_1^3 y_3, \\ \mathrm{A}x_2 &= b_2^1 y_1 + b_2^2 y_2 + b_2^3 y_3, \\ \mathrm{A}x_3 &= b_3^1 y_1 + b_3^2 y_2 + b_3^3 y_3. \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

*Ainsi, des formules* (1) *on déduit les formules* (2'). Je peux opérer de même sur les formules (2'). Si je représente par des lettres $d$ les éléments du déterminant D, réciproque de B, j'aurai, en appliquant la même règle,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{B}y_1 &= d_1^1 \mathrm{A}x_1 + d_1^2 \mathrm{A}x_2 + d_1^3 \mathrm{A}x_3, \\ \mathrm{B}y_2 &= d_2^1 \mathrm{A}x_1 + d_2^2 \mathrm{A}x_2 + d_2^3 \mathrm{A}x_3, \\ \mathrm{B}y_3 &= d_3^1 \mathrm{A}x_1 + d_3^2 \mathrm{A}x_2 + d_3^3 \mathrm{A}x_3. \end{aligned}\right. \tag{1'}$$

En comparant ces égalités (1') aux égalités (1), on en conclut

$$d_p^q \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = a_p^q.$$

et, en remplaçant B par sa valeur $A^{n-1}$,

$$d_p^q = A^{n-2} a_p^q. \tag{7}$$

Les formules (6) et (7) s'énoncent respectivement ainsi :

1° Le réciproque d'un déterminant A d'ordre $n$ a pour valeur $A^{n-1}$;

2° Le réciproque du réciproque d'un déterminant A d'ordre $n$ a pour éléments ceux de A multipliés par $A^{n-2}$.