NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GENESE

# Sur un cercle remarquable qui passe par deux points fixes d'une conique

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 10 (1891), p. 318-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__318_1>

## SUR UN CERCLE REMARQUABLE QUI PASSE PAR DEUX POINTS FIXES D'UNE CONIQUE;

PAR M. GENESE,
Professeur à Aberystwyth (province de Galles).

*Soient* AB *une corde fixe d'une conique,* C *son pôle,* P *un point variable de la courbe; par* C *on mène une droite antiparallèle à* AB *par rapport à l'angle* APB *rencontrant* PA, PB *en* Q, Q'. *Alors les points* A, B, Q', Q *sont sur un même cercle. Ce cercle est invariable.*

Nommons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les perpendiculaires abaissées du point P sur B$b$, $b$A, AB. La conique a pour équation

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = k^2 \qquad \text{(une constante)}.$$

Or

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\sin \mathrm{PB}b}{\sin \mathrm{PBA}} = \frac{\sin(180^\circ - \mathrm{CBQ'})}{\sin(180^\circ - \mathrm{AQC})} = \frac{\sin \mathrm{CBQ'}}{\sin \mathrm{CQA}};$$

de même

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sin \mathrm{CAQ}}{\sin \mathrm{CQ'B}}.$$

Donc

$$k^2 = \frac{\sin \mathrm{CBQ'}}{\sin \mathrm{CQ'B}} \times \frac{\sin \mathrm{CAQ}}{\sin \mathrm{CQA}} = \frac{\mathrm{CQ'}}{\mathrm{CB}} \times \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CA}}.$$

On voit maintenant que la puissance de C par rapport au cercle ABQ′Q a une valeur constante. De là, en pro-

Fig. 1.

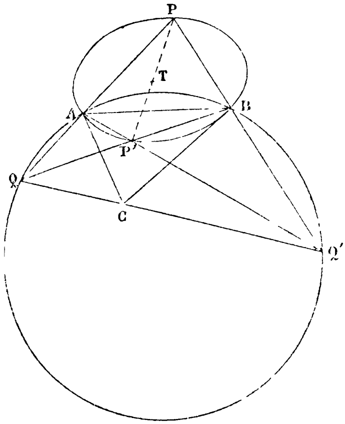
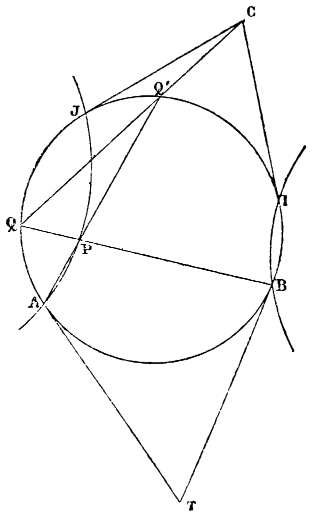



Fig. 2.




longeant la droite BC, on trouve encore un point fixe du cercle. Donc le cercle est complètement déterminé.

C. Q. F. D.

*Inversement, la conique est déterminée par le cercle* ABQ′Q *et le point* C. On mène la sécante QCQ′; le lieu du point (P) d'intersection des droites QA, Q′B est la conique. Les droites QB, Q′A se rencontrent en P′, un point de la même courbe.

Les droites QQ′, PP′ sont homologues par rapport au cercle, et, puisque QQ′ passe par un point fixe, il en est de même avec PP'. Nommons T ce point fixe de la droite PP'; le point T est le pôle de la droite AB par rapport au cercle.

On peut vérifier les théorèmes précédents par la méthode de la projection. Que la conique et le cercle se rencontrent encore aux points I, J, et projetons de façon à rejeter $ij$, la projection de IJ, à l'infini. On obtient deux cercles. En se servant de petites lettres pour désigner les projections des lettres majuscules, les angles $apb$, $aqb$ sont constants, et, par suite, l'angle $qbq'$ ($= qaq'$) est constant. Il faut alors que $c$ soit le centre du cercle $qab$; autrement, $qq'$ toucherait un cercle concentrique, au lieu de passer par un point fixe. Puis, l'angle $pap'$ étant droit, $pp'$ passe par le centre ($t$) du cercle $pap'b$. De plus, $c$ étant le pôle de $ab$ par rapport au cercle $t$, les deux cercles se coupent orthogonalement et $t$ est pôle de $ab$ par rapport au cercle $c$.

Enfin, $c$, $t$ sont les pôles de la droite à l'infini $ij$; donc C, T, dans la figure originale, sont les pôles de IJ aussi bien que de AB (*fig.* 2).

On voit immédiatement que le point T jouit de la propriété suivante : TPP' *étant une sécante variable de la conique, la somme* (*avec une certaine convention*) *des angles* APB, AP'B *est invariable.* (En effet, dans la *fig.* 1, c'est la différence qui est constante.) M. Gaston Tarry a remarqué qu'il y a deux points qui jouissent de cette propriété. Une analyse assez compliquée m'a montré qu'il n'y a que deux points réels qui en jouissent, et que T est un des points remarqués par M. Tarry.