MAURICE LIROUX

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1890). Solution géométrique de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 264-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__264_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1890).
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. MAURICE LIROUX,
Élève au lycée de Lille.

On donne un triangle ABC *et un point* P *dans son plan.*

Trouver le lieu des centres des coniques S *inscrites dans le triangle* ABC *et vues du point* P *sous un angle droit.*

---

(1) M est toujours situé sur la bissectrice de l'angle HCH′, laquelle passe par le centre ω.

Démontrer que les coniques sont vues sous un angle droit d'un autre point P′; *montrer que, si* P *se déplace, la droite* PP′ *passe par un point fixe* I *et que le produit* IP.IP′ *est constant.*

La démonstration géométrique de cette question repose tout entière sur la proposition suivante : *Les cercles de Monge relatifs aux coniques inscrites dans un quadrilatère ont même axe radical,* et sur ce théorème de Steiner : *Les directrices des paraboles inscrites dans un triangle passent par le point de concours des hauteurs du triangle.*

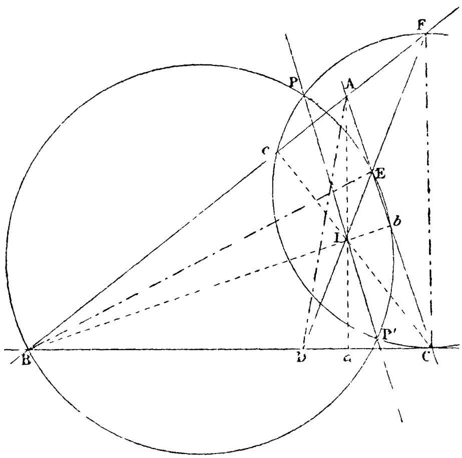
Transformons par polaires réciproques en prenant le point P pour pôle.

Les coniques, vues du point P sous un angle droit, se transforment en des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle; d'après un théorème connu, ces hyperboles passent par un quatrième point fixe; donc les coniques, dont elles sont les transformées, sont tangentes à une quatrième droite fixe : elles sont donc inscrites dans un quadrilatère.

Si nous considérons les cercles de Monge relatifs à ces coniques, ils ont, d'après le premier théorème rappelé, même axe radical; et, comme les diagonales du quadrilatère sont des coniques indéfiniment aplaties, leurs cercles de Monge sont les cercles décrits sur elles comme diamètres; ces cercles se coupant en un point P se couperont en un autre point P′ fixe : c'est le second point cherché.

Si nous remarquons que le centre du cercle de Monge coïncide avec le centre de la conique, nous voyons que, pour obtenir le lieu des centres des coniques, il suffit d'élever, par le milieu de PP′, la droite perpendiculaire à PP′.

Aux quatre droites du quadrilatère, joignons la droite de l'infini : il n'y a qu'une conique qui est inscrite dans ces cinq droites ; donc une seule parabole pour chaque position du point P.



Or le point P est un point de la directrice de cette parabole, le point P' en est un autre ; donc PP' qui est la directrice passera, en vertu du théorème de Steiner, par le point de concours des hauteurs des quatre triangles que l'on peut former avec le quadrilatère, et, en particulier, du triangle ABC.

Supposons tracée la quatrième droite DEF du quadrilatère ; considérons les cercles décrits sur les diagonales BE et CF comme diamètres : ils passent par P, P' et par le pied d'une hauteur.

Or, le cercle décrit sur BE comme diamètre, donne

$$\mathrm{PI}.\mathrm{PI}' = \mathrm{BI}.b\mathrm{I} = \text{const.}$$

Remarque. — La démonstration précédente donne le moyen de construire la quatrième droite du quadrilatère. Faisons passer un cercle par le point P, par un sommet B du triangle et par le pied b de la hauteur correspondante; ce cercle coupera le côté AC en un second point E qui appartient à la droite cherchée; on agira de même avec une autre hauteur du triangle et l'on joindra les deux points obtenus.