NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. ADER

Démonstration nouvelle d'un théorème sur les normalies

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 225-228

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__225_0>

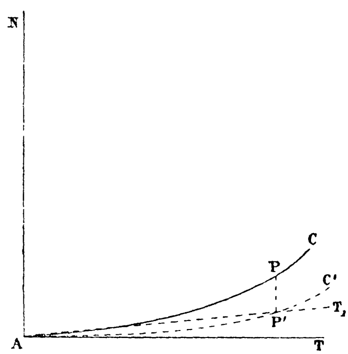
DÉMONSTRATION NOUVELLE D'UN THÉORÈME SUR LES NORMALIES;

PAR M. H. ADER,
Élève à l'École Polytechnique.

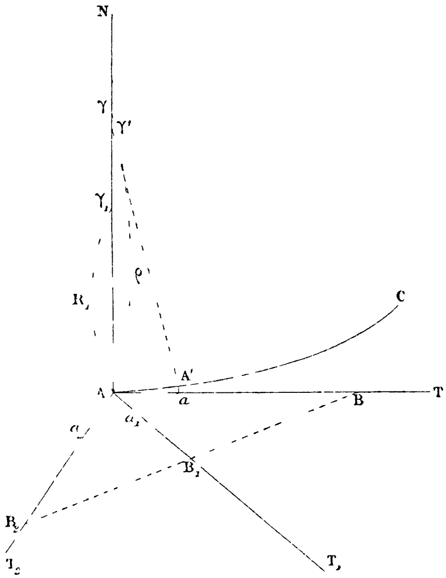
En un point d'une surface, les rayons de courbure des sections normales sont proportionnels aux carrés des diamètres d'une conique appelée *indicatrice;* on peut déduire de là le théorème des tangentes conjuguées. (BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 670. — POINCARÉ, *Nouvelles Annales de Mathématiques;* 1874.)

Cela étant, on peut démontrer que, si la directrice d'une normalie passe par un point A d'une surface, les plans principaux relatifs à ce point sont tangents à la normalie aux centres de courbure principaux.

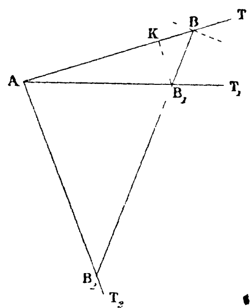
Pour cela, démontrons d'abord que, si l'on considère deux normalies dont l'une a pour directrice la section



par le plan NAT (AN étant la normale à la surface que nous supposons verticale) et l'autre une courbe AC tangente en A à AT, et projetée sur le plan horizontal du point A suivant AC', ces deux normalies se raccordent le long de AN. En effet, coupons par le plan NAT_1 voisin de NAT; la normalie qui a pour directrice cette section a avec la normalie AC deux génératrices communes : AN et la normale au point P d'intersection de AC avec NAT_1. Si donc on fait tendre NAT_1 vers NAT, à la limite, les deux normalies (NAT) et (AC) ont deux génératrices infiniment voisines communes et se raccordent.



Il suffit donc de démontrer la propriété énoncée pour une normalie ayant pour directrice une section normale. Or, pour trouver le point de contact avec la normalie (NAT) d'un plan passant par AN, il suffit de chercher la limite du point d'intersection avec ce plan de la normale au point A' infiniment voisin de A. Si donc on considère deux plans NAT_1, NAT_2, les hauteurs de leurs points de contact au-dessus du plan horizontal sont dans le rapport $\frac{aa_1}{aa_2}$, aa_1a_2 étant la projection de la normale en A'. Or cette normale, étant perpendiculaire au plan tangent en A', a sa projection perpendiculaire à la trace de ce plan, qui n'est autre que la caractéristique du plan



tangent en A, c'est-à-dire le diamètre conjugué de AT. Les hauteurs des points de contact de NAT_1 et NAT_2 sont donc dans le rapport $\frac{BB_1}{BB_2}$, BB_1B_2 étant une perpendiculaire quelconque au diamètre conjugué de AT; par exemple, si B est sur l'indicatrice, la normale à cette courbe est au point B. Or si NAT_2 est perpendiculaire à NAT, son point d'intersection avec la normale en A' se projette sur le plan NAT en γ'. Le point de contact de ce plan avec la normalie est la limite de γ', c'est-à-dire γ, centre de courbure de AC. Si l'on suppose, de plus, que NAT_1 est le plan principal correspondant à l'axe a de l'indicatrice, pour démontrer qu'il est tangent en γ_1, centre de courbure de la section principale correspondant à l'axe b, il suffit de démontrer que

$$\frac{BB_1}{BB_2} = \frac{A\gamma_1}{A\gamma} = \frac{R_1}{\rho} = \frac{b^2}{a'^2},$$

c'est-à-dire que $\frac{BK}{BA} = \frac{b^2}{a'^2}$ ou $BK = \frac{b^2}{a'}$, ce qui est une propriété connue des coniques.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Remarque. — La démonstration donne en même temps le moyen d'avoir le point de contact d'un plan tangent quelconque, le paramètre de distribution, etc.