NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 163-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__163_0>

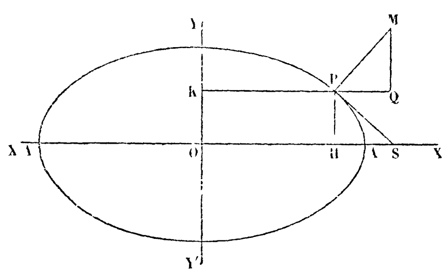
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION [1];

Par M. L. MALEYX.

XIII. *Normales à une conique passant par un point donné dans son plan,* THÉORÈME DE JOACHIMSTAHL. — Examinons le cas de l'ellipse, la question se résoudra d'une manière analogue pour les autres courbes.

Soit O une ellipse dont les axes $2a$, $2b$ sont dirigés suivant OX, OY, et à laquelle nous voulons mener une normale par le point M (*fig.* 76).

Fig. 76.



Soit MP une de ces normales; P son point d'incidence, que nous définirons par ses distances PH, PK aux deux axes; nous représenterons ces distances, ou coordonnées, par y, x respectivement. Nous définirons aussi la position du point M par les distances analogues, β, α; y, x, β, α étant susceptibles de signes.

Menons la tangente PS en P, cette droite rencontrant OX en S; les deux triangles rectangles MPQ,

(1) Voir t. X (1891) p. 125.

PHS sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires : on en déduit

$$\frac{MQ}{PQ} = \frac{OS - OH}{PH} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta - y}{\alpha - x} = \frac{OS - x}{y}.$$

Mais les points H, S étant conjugués harmoniques par rapport à A, A′, on a

$$\overline{OA}^2 = OS \times OH, \qquad \text{d'où} \qquad OS = \frac{a^2}{x};$$

remplaçant,

$$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = \frac{\frac{a^2}{x} - x}{y} = \frac{a^2 - x^2}{xy}.$$

D'après le n° II du présent Chapitre, on a

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2:$$

substituant,

$$(1) \qquad \frac{y - \beta}{x - \alpha} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(a^2 - b^2) xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0$$

ou

$$(2) \qquad \left(y + \frac{b^2 \beta}{a^2 - b^2}\right)\left(x - \frac{a^2 \alpha}{a^2 - b^2}\right) = \frac{-a^2 b^2 \alpha\beta}{a^2 - b^2}.$$

Si nous construisons les parallèles à OY, OX, situés à des distances du point O respectivement représentées par $\frac{a^2\alpha}{a^2 - b^2}$, $\frac{-b^2\beta}{a^2 - b^2}$, les facteurs $x - \frac{a^2\alpha}{a^2 - b^2}$, $y + \frac{b^2\beta}{a^2 - b^2}$, représentent les distances du point P à ces deux parallèles.

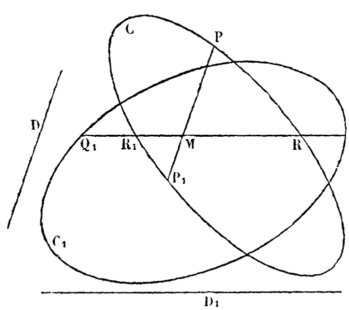
Il résulte de la relation (2) que le produit de ces distances est constant, et, d'après le premier des théorèmes d'Apollonius, que le point P se trouve sur une hyperbole équilatère ayant ces parallèles pour asymptotes.

La relation (1) étant visiblement satisfaite pour le point M et pour le point O, ces deux points appartiennent à l'hyperbole équilatère. On peut construire cette courbe dont on connaît les asymptotes et deux points; ses points communs avec l'ellipse feront connaître les points d'incidence des normales issues de P, qui sont en général au nombre de quatre.

On peut conclure du théorème du numéro précédent, que : *trois des points d'incidence des normales menées d'un point à une conique et le point diamétralement opposé au point d'incidence de la quatrième, dans cette conique, appartiennent à un même cercle;* c'est là le THÉORÈME DE JOACHIMSTAHL.

XIV. LIEU GÉOMÉTRIQUE. — *Étant données deux coniques* C *et* C_1, *ainsi que deux directions* D *et* D_1, *dans le même plan; par un point* M *du plan on mène*

FIG. 77



deux parallèles, la première à la direction D, *rencontrant la conique* C *aux points* P *et* P_1, *la deuxième à la droite* D_1, *rencontrant la conique* C_1 *aux points* Q *et* Q_1; *on demande de déterminer le lieu du point* M *par la condition que le produit* MP $\times$ MP$_1$ *ait avec le produit* MQ $\times$ MQ$_1$ *un rapport donné* α (*fig.* 77).

Soient R et R$_1$ les points où la parallèle à D$_1$ passant par M rencontre la conique C, pour tous les points du plan, et, d'après le théorème de Newton, on a, β étant un nombre fini,

$$\frac{MP \times MP_1}{MR \times MR_1} = \beta.$$

Si, en outre, M est un point du lieu, on a aussi

$$\frac{MP \times MP_1}{MQ \times MQ_1} = \alpha.$$

Divisant membre à membre, on en conclut que, pour tous les points M du lieu,

$$\frac{MQ \times MQ_1}{MR \times MR_1} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

D'après cette égalité, le rapport involutif d'un point M du lieu, par rapport aux couples de points de rencontre d'une droite de direction donnée avec les coniques C et C$_1$, est constant, et il en résulte, d'après le théorème du n° VII du Chap. II, que le lieu est une conique passant par les points communs des deux premières.

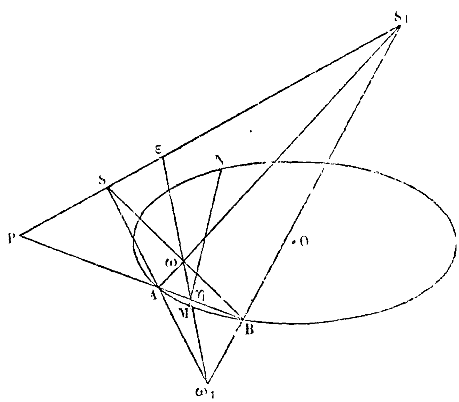
XV. *Si deux cônes ont pour directrice une même conique, ils se coupent suivant une seconde courbe plane, qui est une autre conique* [1]. — Soient S et S$_1$ les sommets des deux cônes ayant pour directrice la conique O (*fig.* 78); unissons S$_1$S par une ligne droite

---

[1] Depuis ma rédaction, je me suis aperçu que la démonstration géométrique de ce théorème se trouvait dans le *Cours de Géométrie descriptive* de M. Ch. Brisse, II^{e} Partie, p. 92.

coupant le plan de la directrice en P. Par la droite SS_1 faisons passer un plan variable coupant celui de la directrice suivant la droite PAB et les deux cônes suivant les deux couples de génératrices SA et SB, S_1A et S_1B. Ces deux couples de génératrices se coupent aux points A, B, ω, ω_1 ; les points A, B décrivent la directrice, les points ω, ω_1 la seconde partie de l'intersection qu'il faut démontrer être plane.

Fig. 78.



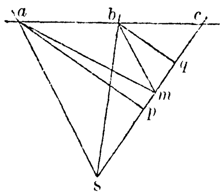
Or la droite $\omega_1\omega$ est la polaire de P par rapport aux deux droites ω_1S, ω_1S_1 ; il en résulte que les points ε, η, où elle rencontre PS_1 et PB, sont conjugués harmoniques de P par rapport aux couples de points S et S_1, A et B ; le point ε est fixe, puisque P, S et S_1 le sont, et quant à η il décrit la polaire MN de P par rapport à la conique ; les points ω, ω_1 sont donc situés dans le plan εMN qui est fixe, et, en conséquence, la courbe qu'ils décrivent est plane.

XVI. Note. — Le théorème de Pappus nous a servi au n° VI, Chap. II, pour établir un théorème important par ses conséquences, soit pour fournir une construction relativement simple des points communs d'une conique et d'une droite, soit pour établir d'une manière immédiate le théorème de DESARGUES.

Il nous a paru intéressant de montrer comment, du même théorème de PAPPUS se déduit le principe de description d'une conique par le point d'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques, et c'est là le but de la présente Note, par laquelle nous allons terminer notre étude.

LEMME I. — *Considérons un faisceau de trois droites issues d'un point* S (*fig.* 79), *et une sécante qui les rencontre en* a, b, c; *le rapport des segments* ca, cb

Fig. 79.



est égal à celui des aires des triangles Sam, Sbm *ayant pour bases les rayons* Sa, Sb, *et pour sommet un point* m *quelconque situé sur le rayon* Sc.

En effet, les deux triangles Sac, Sbc, considérés comme ayant leur sommet en S, ont même hauteur et sont proportionnels à leurs bases; et, si on les considère comme ayant leurs sommets en a et b, ils ont même base et sont proportionnels à leurs hauteurs, d'où les égalités

$$\frac{ca}{cb} = \frac{Sac}{Sbc} = \frac{ap}{bq},$$

ap et bq étant les perpendiculaires menées de a et b sur Sc.

D'ailleurs, les deux triangles amS, bmS ont aussi même base et pour hauteurs ap et bq respectivement; dès lors,

$$\frac{ap}{bq} = \frac{maS}{mbS},$$

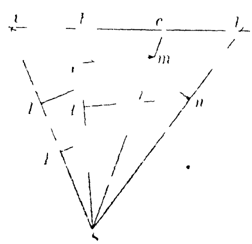
et, par comparaison avec les égalités précédentes, on a

$$\frac{ca}{cb} = \frac{maS}{mbS},$$

ce qu'on voulait démontrer.

LEMME II. — *Le rapport anharmonique des quatre points* a, b, c, d, *où une droite coupe les rayons d'un faisceau* $S.abcd$ (*fig.* 80), *soit* $\frac{ca}{cb}:\frac{da}{db}$, *est égal au rapport*

Fig. 80



port des rapports des distances de deux points m *et* n *pris arbitrairement sur les rayons* Sc, Sd, *aux rayons* Sa *et* Sb, *respectivement, soit* $\frac{mp}{mq}:\frac{np_1}{nq_1}$, mp, np_1 *étant perpendiculaires sur* Sa, *et* mq, nq_1 *perpendiculaires sur* Sb.

En effet, et d'après le lemme I, on a

$$\frac{ca}{cb} = \frac{maS}{mbS}$$

et

$$\frac{da}{db} = \frac{naS}{nbS};$$

divisant membre à membre,

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{maS}{mbS} : \frac{naS}{nbS},$$

ou

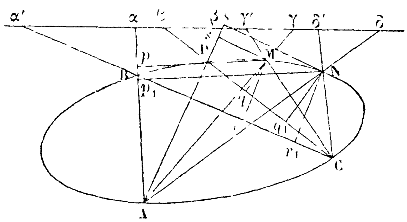
$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{maS}{naS} : \frac{mbS}{nbS};$$

mais les couples de triangles maS et naS, mbS et nbS ont mêmes bases et sont proportionnels à leurs hauteurs; donc, substituant aux rapports de ces triangles ceux de leurs hauteurs dans la dernière égalité, on a

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{mp}{mq} : \frac{np_1}{nq_1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Soit actuellement une conique ABDMNC : construisons deux faisceaux ayant pour sommets deux points A

Fig. 81.



et C de la conique, et dont les rayons homologues se coupent sur cette courbe en B, D, M, N (*fig.* 81); il s'agit de montrer qu'ils sont homographiques, c'est-à-dire que les deux faisceaux A.BDMN, C.BDMN, ont même rapport anharmonique. Pour le démontrer, coupons les deux faisceaux par la transversale α', δ, et des points M et n abaissons Mp, Np_1 perpendiculaires sur AB, de même. Mq, Nq_1 sur DC; Mr. Nr_1 sur BC; Ms, Ns_1 sur AD; il suffit de montrer l'égalité des deux rapports anharmoniques $\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}$ et $\frac{\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta'} : \frac{\delta'\alpha'}{\delta'\beta'}$.

Or, d'après le lemme précédent,

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{Mp}{Ms} : \frac{Np_1}{Ns_1}$$

et

$$\frac{\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta'} : \frac{\delta'\alpha'}{\delta'\beta'} = \frac{Mr}{Mq} : \frac{Nr_1}{Nq_1};$$

dès lors, il suffit d'établir,

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Np_1}{Ns_1} = \frac{Mr}{Mq} : \frac{Nr_1}{Nq_1}$$

ou

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Mr}{Mq} = \frac{Np_1}{Ns_1} : \frac{Nr_1}{Nq_1},$$

ce qui est évident d'après le théorème de Pappus, ABCD constituant un quadrilatère inscrit, et d'après les égalités

$$Mp \times Mq = \alpha Mr \times Ms$$

et

$$Np_1 \times Nq_1 = \alpha Nr_1 \times Ns_1,$$

lues sous les formes

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Mr}{Mq} = \alpha = \frac{Np_1}{Ns_1} : \frac{Nr_1}{Nq_1}.$$

(*Fin*.)