Nouvelles annales de mathématiques

T. Clugnet

Note de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 153-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__153_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

Par M. T. CLUGNET,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

Théorème. — *Si, d'un point* ω *de l'axe d'une conique* (*fig.* 1), *comme centre, on décrit une circonférence de rayon quelconque, les cordes d'intersection* MM_1, $M'M'_1$ *du cercle et de la conique sont à égales distances du pied* K *de la normale menée par* ω.

Fig. 1.

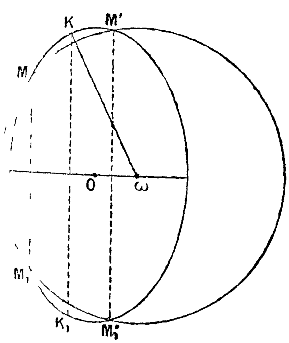
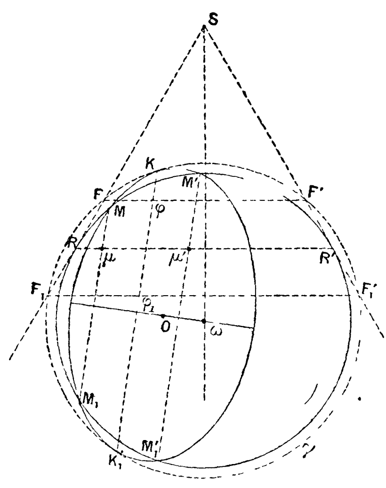


Fig. 2.



En effet, soit une tangente quelconque RS à la circonférence (*fig.* 2), on peut la considérer comme engendrant un cône d'axe ωS quelconque, passant par ω et situé dans le plan de la figure.

De même, la conique, en tournant autour de son axe ωO, engendre une surface de révolution du second ordre.

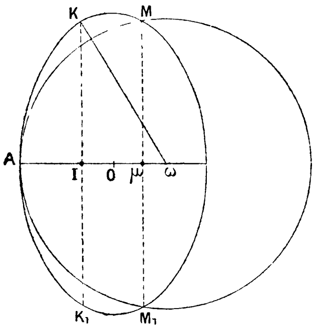
L'intersection de ces deux surfaces se projette sur le plan $O\omega S$ des axes, suivant une conique, dont on a deux diamètres conjugués à l'aide des sphères limites.

L'une de ces sphères est déterminée par le cercle ωR et donne le diamètre $\mu\mu'$. L'autre sphère est déterminée par le cercle $\omega K\gamma$, tangent à la conique, et fournit le second diamètre $K\varphi\varphi_1 K_1$.

Or K est le pied de normale ωK et KK_1 passe au milieu de $\mu\mu'$. C. Q. F. D.

Corollaire. — Si d'un point ω de l'axe d'une conique on décrit, comme centre, une circonférence tangente au sommet, le pied de la normale ωK, menée de

Fig. 3.



ce point à la conique, est à égales distances de la tangente au sommet et de la corde d'intersection MM_1 du cercle et de la conique (*fig.* 3).

Remarque I. — Ce corollaire donne une construction très rapide de la normale. Il suffit de décrire le cercle tangent en A; de tracer la corde MM_1 (¹), et de mener par I, milieu de $A\mu$, la perpendiculaire IK à l'axe.

Réciproquement, si l'on connaît le pied K de la normale, on en déduit la détermination de la corde MM_1 d'intersection de la conique et du cercle de centre ω et de rayon ωA.

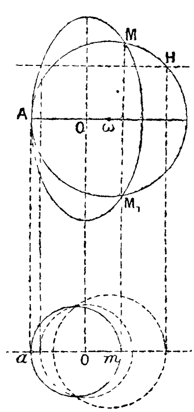
Et en particulier la corde réelle MM_1 (*fig.* 4), lorsque

(¹) On peut, d'ailleurs, déterminer géométriquement cette corde MM_1. Il suffit, en effet, de considérer la surface de révolution engendrée par la conique autour de son second axe OB et la sphère de grand cercle ωA. Ces deux surfaces se coupent suivant une courbe projetée suivant un cercle sur un plan parallèle au plan projetant ωO.

Ce cercle, dont on a déjà le point a, se détermine à l'aide d'une parallèle H quelconque.

D'où le point m et la corde MM_1 (*fig.* α).

Fig. α.



Cette construction s'applique également au cas où le cercle n'est pas tangent au sommet. Il suffit alors de prendre deux parallèles pour déterminer le cercle de projection dont le diamètre de front donne les deux cordes cherchées.

les points d'intersection du cercle et de la conique sont imaginaires.

Remarque II. — La construction qui précède permet de construire rapidement la développée de la conique.

Fig. 4.

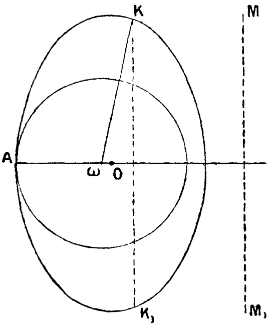
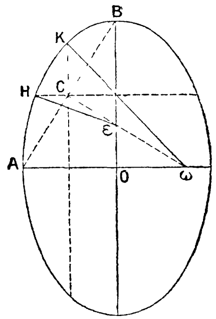


Fig. 5.



Remarque III. — Si l'on mène la perpendiculaire $C\varepsilon\omega$ à AB, en son milieu, les normales issues de ε et de ω ont leurs pieds en H et K, sur les parallèles aux axes passant par C (*fig.* 5).

Fig. 6.

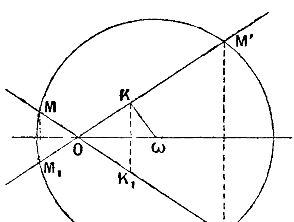
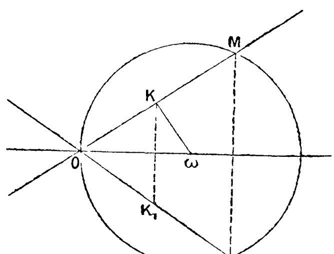


Fig. 7.

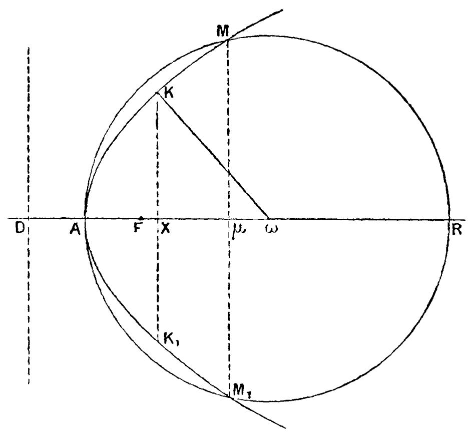


Remarque IV. — Le théorème et le corollaire précédents sont évidents lorsque la conique se réduit à deux droites qui se coupent (*fig.* 6 et 7).

Remarque V. — Soit une parabole de foyer F et de paramètre p (*fig.* 8). On a encore, si ωK est la normale,

$$AX = X\mu.$$

Fig. 8.



Mais

$$AX = A\omega - X\omega = A\omega - p$$

et, par suite,

$$A\mu = 2AX = 2A\omega - 2p = AR - 2p.$$

Cette relation

$$A\mu = AR - 2p$$

détermine la corde d'intersection du cercle ωA et de la parabole. Mais elle montre en outre que

$$AR - A\mu = \mu R = 2p = 4AF.$$

D'où ce théorème :

Théorème. — *La flèche de l'arc intercepté par une parabole, dans toute circonférence tangente en son sommet, est constante et égale au double du paramètre.*

Remarque. — Il suit de là que la position limite de la corde MM_1 est obtenue lorsque AR lui-même est égal à $2p$.

Dans ce cas, le cercle est osculateur et l'on retrouve ainsi le paramètre pour la valeur du rayon de courbure au sommet.