NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. ADAM

Sur le lieu des centres de courbure d’une courbe gauche et sur les courbes gauches à courbure constante

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 142-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__142_0>

SUR LE LIEU DES CENTRES DE COURBURE D'UNE COURBE GAUCHE ET SUR LES COURBES GAUCHES A COURBURE CONSTANTE;

PAR M. P. ADAM,
Ingénieur.

Le lieu des centres de courbure d'une courbe plane est l'enveloppe des normales à cette courbe; il n'en est pas de même pour une courbe gauche; mais, dans ce cas :

Le lieu des centres de courbure est l'enveloppe du cercle normal à la courbe considérée et ayant pour diamètre le rayon de la sphère osculatrice qui aboutit à cette courbe.

On voit que cette propriété conduit à la première, comme cas particulier, quand on fait grandir indéfiniment le rayon de la sphère osculatrice en chaque point de la courbe gauche.

Voici, pour démontrer cette proposition, un procédé géométrique très élégant que M. Darboux a bien voulu nous indiquer.

Soit Γ l'arête de rebroussement de la surface polaire de la courbe gauche C considérée. Chaque tangente OO' à Γ est la droite polaire d'un point correspondant M de C; le plan $OO'M$ est normal à C, et le pied O' de la perpendiculaire abaissée de M sur OO' est le centre de courbure de C au point M. Le lieu de O' est une courbe

---

arbitraire, mais en plaçant toujours le point S au point de contact de cette sphère et d'un plan tangent parallèle au plan P.

C' tracée sur la surface polaire et dont, par suite, la tangente $O'T'$ est située dans le plan normal $OO'M$.

Déroulons la surface polaire sur l'un quelconque $O_0O'_0M_0$ de ses plans tangents, en lui donnant une série de rotations élémentaires convenables autour de ses génératrices successives O, O'. Il est visible que les points de C ne quitteront pas cette courbe et viendront en M_0, de sorte que la courbe C se réduira au point M_0. Les courbes Γ et C' se transformeront en deux courbes planes Γ_1 et C_1 ; l'angle droit $OO'M$ viendra en $O_1O'_1M_0$ en restant droit ; la tangente $O'T'$ viendra en $O'_1T'_1$, et comme les éléments de Γ et de C', situés en O et O', ne quittent pas les tangentes OO' et $O'T'$, il s'ensuit que $O'O'_1$ et O'_1T_1 sont des tangentes à Γ_1 et à C'_1.

Donc :

C_1 *est la podaire de* Γ_1 *par rapport au point* M_0.

Or, d'après une propriété bien connue de la podaire d'une courbe plane Γ_1 par rapport à un point M_0 de son plan :

Cette podaire est l'enveloppe des cercles décrits sur les rayons vecteurs M_0O_1 *comme diamètres.*

Il suffit donc de revenir à la surface polaire et de se rappeler que OM est un rayon de la sphère osculatrice en M à la courbe C pour obtenir la propriété qu'il s'agissait de démontrer.

On peut démontrer cette même propriété assez rapidement par le calcul. Il suffit d'établir que la tangente $O'T'$ est située dans le plan normal à C et qu'elle est perpendiculaire à la droite $O'O''$ qui va du centre de courbure O' au milieu O'' de MO.

Appelons x, y, z les coordonnées du point M. On sait que les coordonnées du centre de courbure O' et du centre O de la sphère osculatrice sont respectivement

$$a + R\alpha' \quad \text{et} \quad x + Ra' - T\alpha''\frac{dR}{ds},$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les coordonnées du milieu O'' de MO sont donc

$$x + \frac{R\alpha'}{2} - \frac{T\alpha''}{2}\frac{dR}{ds},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et les droites O'T' et O'O'' ont leurs cosinus directeurs proportionnels respectivement à

$$\alpha + R\frac{d\alpha'}{ds} + \alpha'\frac{dR}{ds} \quad \text{et à} \quad R\alpha' + T\alpha''\frac{dR}{ds},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Nous voulons montrer que

$$\sum \alpha\left(\alpha - R\frac{d\alpha'}{ds} - \alpha'\frac{dR}{ds}\right) = 0$$

et que

$$\sum \left(R\alpha' + T\alpha''\frac{dR}{ds}\right)\left(\alpha - R\frac{d\alpha'}{ds} + \alpha'\frac{dR}{ds}\right) = 0.$$

On le vérifie de suite en se servant des relations

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\alpha'}{ds} = -\dfrac{\alpha}{R} - \dfrac{\alpha''}{T}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour pousser plus loin l'analogie entre les deux propriétés énoncées au début de cette Note, cherchons une expression de l'arc élémentaire $d\sigma$ de la courbe C' des centres de courbure, au moyen du rayon R_1 de la sphère osculatrice.

En appelant ξ, η, ζ les coordonnées du centre de courbure O', on a

$$(2) \qquad \frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{ds^2}.$$

Or

$$\xi = x - \mathrm{R}\alpha',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ce qui donne

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha - \alpha' \frac{d\mathrm{R}}{ds} - \mathrm{R}\frac{d\alpha'}{ds},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et, en tenant compte des relations (1),

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha' \frac{d\mathrm{R}}{ds} - \frac{\mathrm{R}\alpha''}{\mathrm{T}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Portant ces valeurs dans l'expression (2) de $\frac{d\sigma^2}{ds^2}$, il vient

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \left(\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)^2 + \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{T}^2}.$$

Mais le carré R_1^2 du rayon de la sphère osculatrice s'exprime par

$$\mathrm{R}_1^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{T}^2\left(\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)^2;$$

par suite,

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{\mathrm{R}_1^2}{\mathrm{T}^2}$$

ou bien

$$\frac{d\sigma}{\mathrm{R}_1} = \frac{ds}{\mathrm{T}}. \tag{3}$$

Soit MN celle des normales à la courbe C qui est tangente à la sphère osculatrice, c'est-à-dire qui est perpendiculaire à OM; MN n'est autre chose que la direction conjuguée à C sur la sphère osculatrice, ce qui revient à dire que MN admet une enveloppe γ: γ est donc l'une des développées de la courbe C, et, par suite, en désignant par φ l'angle $\widehat{\mathrm{NMO'}}$, ou son égal $\widehat{\mathrm{O'OM}}$, on a, en vertu d'une formule connue,

$$\frac{ds}{\mathrm{T}} = d\varphi.$$

(3) donne donc

$$d\sigma = R_1\, d\varphi.$$

Soit σ_1 l'arc O'M du cercle OO'M décrit sur OM comme diamètre. On a

$$\sigma_1 = R_1 \varphi.$$

d'où

$$d\sigma_1 = R_1\, d\varphi + \varphi\, dR_1 = d\sigma + \varphi\, dR_1.$$

Ainsi, dans le cas d'une courbe gauche, la différentielle $d\sigma$ de la courbe lieu des centres de courbure *n'est pas égale,* en général, à la différentielle $d\sigma_1$ de l'arc de cercle normal O'M dont ce lieu est l'enveloppe. Elle ne le devient que si $dR_1 = 0$, c'est-à-dire $R_1 = \text{const.}$

Donc :

Les courbes gauches pour lesquelles le rayon de la sphère osculatrice est constant sont les seules dont la courbe des centres de courbure soit une développée par rapport au cercle OO'M *ayant pour diamètre le rayon de cette sphère.*

A ce titre, ces courbes offrent de l'intérêt : elles forment une transition entre la courbe gauche quelconque et la courbe plane.

Nous allons voir que ces courbes pour lesquelles le rayon de la sphère osculatrice est constant offrent d'autres caractères géométriques remarquables.

Appliquons, en effet, leur surface polaire sur le plan, comme nous l'avons fait précédemment dans le cas général ; le rayon OM de la sphère osculatrice devient O_1M_0, et, comme ce rayon est constant, deux cas se présentent :

1° Ou bien Γ_1 se réduit à un point ;

2° Ou bien Γ_1 est un cercle de centre M_0.

Examinons ces deux cas avec quelque détail.

Dans le premier cas, Γ est aussi réduit à un point et, par suite,

La courbe C est une courbe sphérique.

Le triangle rectangle OMN donne alors

$$\overline{OM}^2 = OO' \times ON,$$

c'est-à-dire

$$R_1^2 = OO' \times ON.$$

Donc:

γ et C′ sont deux courbes inverses l'une de l'autre par rapport au centre O de la sphère.

Il résulte de là que la tangente O′T′ à C′ doit être dans le plan normal OMN comme la tangente à γ, et que $\widehat{T'O'N} = \widehat{O'NM}$, c'est-à-dire que O′T′ est tangente au cercle OO′M de diamètre OM. On retrouve ainsi, dans le cas particulier d'une courbe sphérique, la propriété que nous avons énoncée en commençant cette Note. On peut, d'ailleurs, de ce cas particulier, déduire immédiatement la même propriété pour le cas général d'une courbe gauche quelconque, en remarquant que quatre éléments consécutifs de cette courbe appartiennent à la sphère osculatrice.

Soit O‴ le point de rencontre de la droite polaire OO′ avec la sphère sur laquelle est tracée la courbe C′; le point O‴ et l'arc de grand cercle O‴M sont le centre de courbure sphérique et le rayon de courbure sphérique de la courbe C. L'arc de grand cercle O‴M et l'arc O′M du cercle OO′M (arc qu'on peut appeler le *rayon de courbure vrai*) ont même longueur. Si donc on appelle $d\sigma_2$ la différentielle de l'arc O‴M, ou, ce qui est pareil, la différentielle de la développée sphérique, on aura

$$d\sigma_2 = d\sigma_1 = d\sigma$$

Ainsi, dans le cas d'une courbe sphérique :

Le rayon de courbure sphérique et le rayon de courbure vrai ont même longueur; la développée sphérique et la courbe des centres de courbure, qu'on peut appeler la développée vraie, *ont aussi même longueur.*

Le lieu du centre O″ du cercle OO′M est homothétique de la courbe C par rapport au point O. Donc ce lieu est normal au plan du cercle OO′M.

Il en résulte que :

C *et* C′ *sont tracées sur une surface canal* Σ *ayant pour diamètre* OM *le rayon de la sphère;*

mais c'est une surface canal toute particulière, car elle est tangente à une sphère; ou encore, les sphères qui admettent Σ pour enveloppe passent toutes par un point fixe O; C est, d'ailleurs, une ligne de courbure de Σ.

La surface canal Σ est le lieu du cercle OO′M de diamètre OM. Réciproquement :

Si pour une courbe gauche C, *le lieu* Σ *du cercle* OO′M *normal à cette courbe et décrit sur le rayon de la courbe osculatrice comme diamètre est une surface canal, cette courbe est sphérique.*

On peut l'établir analytiquement, mais c'est une chose évidente, car le point O, diamétralement opposé au point M sur la surface canal, doit décrire, comme ce point M, une trajectoire Γ normale au plan du cercle OO′M; et, comme cette trajectoire est tangente au plan OO′M, elle ne peut être qu'un point; le point M reste donc à distance constante d'un point fixe O et la courbe C est sphérique.

Pour terminer ce qui est relatif aux courbes sphériques, remarquons que la développée γ est ici une ligne géodésique sur le cône de sommet O, car le plan osculateur TMN à γ est perpendiculaire au plan OMN, lequel est tangent au cône considéré.

Passons maintenant au second cas, celui dans lequel Γ_1 est un cercle de centre M_0. Alors C'_1 coïncide avec Γ_1. Ainsi :

Quand on applique sur le plan la surface polaire d'une courbe dont la sphère osculatrice a un rayon constant, l'arête de rebroussement de cette surface et la courbe des centres de courbure se transforment en un seul et même cercle.

Dans le cas d'une courbe sphérique, la transformée C'_1 reste quelconque. Il est donc à remarquer que la courbe sphérique qui semblerait devoir être un cas particulier de la courbe dont la sphère osculatrice a un rayon constant en est, au contraire, un cas tout différent qu'il faut traiter à part, comme nous l'avons fait.

Puisque C'_1 coïncide avec Γ_1, on a

$$M_0 O'_1 = M_0 O_1,$$

c'est-à-dire

$$R = R_1.$$

On retrouve ainsi ce théorème connu :

Une courbe gauche dont la sphère osculatrice a un rayon constant est une courbe à courbure constante, et son rayon de courbure est égal au rayon de la sphère osculatrice. L'arête de rebroussement de la surface polaire coïncide donc avec le lieu des centres de courbure.

Ce résultat met encore en relief la différence très grande qu'il y a entre la courbe dont la sphère osculatrice a un rayon constant et la courbe sphérique, puisque cette dernière n'a généralement pas son rayon de courbure constant.

La réciproque de ce théorème est vraie :

Si la courbure d'une courbe gauche est constante, il en est de même du rayon de la sphère osculatrice, et l'on a $R = R_1$.

Cela résulte immédiatement de la relation

$$R_1^2 = R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Voyons ce qu'est, dans le cas particulier qui nous occupe, l'arête de rebroussement Γ de la surface polaire, ou, ce qui est pareil, la courbe C' des centres de courbure.

Pour obtenir Γ il suffit, partant d'une origine quelconque ω, située sur Γ_1, de donner à ce cercle, autour de ses tangentes successives, des rotations élémentaires définies par une loi quelconque; dans ce mouvement, le centre M_0 du cercle Γ_1 décrira précisément la courbe C. Or, étant parvenu à un point quelconque O_1 de Γ_1, le point M_0 décrit autour de la tangente $O_1 N_1$ un élément perpendiculaire au plan $M_0 O_1 \Gamma_1$ déterminé par la portion de Γ_1 non encore déformée.

Donc le lieu des positions successives de la partie non déformée de Γ_1 est une surface canal Σ dont l'axe n'est autre chose que la courbe C décrite par le point M_0; Γ est une courbe tracée sur cette surface canal tangentiellement aux positions successives du cercle Γ_1, et comme les plans de deux cercles Γ_1 consécutifs se coupent suivant une tangente commune $O_1 N_1$, c'est-à-dire comme ces deux cercles n'ont qu'un point commun O_1, Σ est une surface canal à arête de rebroussement réelle et unique Γ. Enfin, les rotations successives du cercle Γ_1

autour de ses tangentes n'altérant l'angle de contingence de ce cercle que d'une quantité infiniment petite par rapport à cet angle, Γ a la même courbure que Γ_1; Γ est donc une courbe à courbure constante comme C et sa courbure est la même que C.

Inversement, considérons le cercle de centre O_1 et de rayon O_1M_0 dont le plan est normal à Γ, c'est-à-dire est perpendiculaire à O_1N_1; ce cercle n'est autre que le cercle osculateur à C en M_0 et il engendre une deuxième surface canal Σ' d'axe Γ et d'arête de rebroussement C; cette arête de rebroussement est unique, parce que deux cercles osculateurs successifs d'une courbe gauche ne se rencontrent qu'en un point.

On peut, en définitive, énoncer le théorème suivant dont la première partie est une proposition classique due à Monge :

Si une courbe gauche a sa courbure $\frac{1}{R}$ *constante, le lieu de ses centres de courbure a aussi sa courbure constante et égale à celle de la proposée. Chacune de ces deux courbes est l'arête de rebroussement unique d'une surface canal de rayon* R *ayant pour axe l'autre courbe et admet pour cercles osculateurs les cercles générateurs de la surface canal sur laquelle elle est tracée.*

Par exemple, la courbe des centres de courbure d'une hélice circulaire est une seconde hélice qui a même courbure que la première, et chacune de ces deux hélices est l'arête de rebroussement unique d'une surface qui admet l'autre hélice comme axe.

La réciproque de ce théorème est évidente :

Si l'on considère une surface canal Σ *à arête de rebroussement unique* Γ, *cette arête est à courbure con-*

stante et elle admet pour cercles osculateurs les cercles générateurs de la surface canal. L'axe C de cette surface est l'arête de rebroussement unique d'une deuxième surface canal Σ' de même rayon que la première, ayant comme axe l'arête de rebroussement de la première et comme cercles osculateurs les cercles générateurs de Σ'.

Terminons par quelques généralités relativement aux courbes gauches quelconques.

Pour une courbe quelconque, la surface lieu du cercle OO'M n'est généralement pas l'enveloppe d'une sphère; mais C est encore une ligne de courbure sur cette surface, comme dans le cas d'une courbe sphérique, puisque les tangentes menées à cette surface normalement à C admettent une enveloppe γ; quant à la développée γ, elle est encore une ligne géodésique sur la surface polaire de C, puisque le plan TMN osculateur à γ est perpendiculaire au plan tangent OMN à la surface polaire; du reste, les autres développées de C sont aussi des lignes géodésiques sur la surface polaire.

γ et C' sont liées encore par la relation

$$OO' \times ON = \overline{OM}^2 = R_1^2;$$

ce sont donc deux courbes inverses, avec pôle et puissance d'inversion variables.

Remarquons enfin que la relation obtenue plus haut

$$d\sigma = R_1\, d\varphi,$$

laquelle devient, pour le cas d'une courbe plane,

$$d\sigma = \infty \times 0$$

montre que, dans ce cas, la vraie valeur de $R_1\, d\varphi$ n'est autre que la différentielle $d\sigma$ de l'arc de la courbe des centres de courbure.