NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DOLBNIA

Sur le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 134-140
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__134_0>

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE $\sqrt{R}$ EN FRACTION CONTINUE;

Par M. J. DOLBNIA.

Je me propose d'exposer ici la démonstration très simple des quelques théorèmes insérés dans le Mémoire d'Abel *Sur l'intégration de la formule différentielle,* etc. (¹).

Théorème I. — R *étant une fonction entière de* x, $\sqrt{R}$ *se développe en fraction continue illimitée*

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_i + \cfrac{1}{y_i}}}},$$

où α, α_1, α_2, ..., α_i *sont des fonctions entières,* y_i *est l'un des quotients complets quelconque. Je dis que* y_i *est racine de l'équation*

$$Ay_i^2 + 2By_i - C = 0,$$

où

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

p_i, q_i *étant des fonctions entières, et les coefficients* A, B, C *satisfaisant à l'égalité*

$$B^2 - AC = R.$$

(¹) *Œuvres complètes,* t. I, p. 104 et suiv.; 1881.

Démonstration. — Posons

$$\alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_{i-1}}}} = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_{i-1} + \cfrac{1}{\alpha_i}}}} = \frac{p_i}{q_i},$$

alors on aura

$$\sqrt{R} = \frac{p_i y_i + p_{i-1}}{q_i y_i + q_{i-1}},$$

ou

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

D'où il suit que

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

$$B^2 - AC = (p_i q_{-i} - q_i p_{i-1})^2 R = R, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II. — *Soit*

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{+ \alpha_i \cfrac{1}{y_i}}}},$$

où y_i est l'une des racines de l'équation

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

Si

$$p_i^2 - q_i^2 R = a,$$

a étant constant, pour i impair, nous aurons

$$a = 1.$$

Démonstration. — Des équations

$$p_i^2 - q_i^2 R = a,$$
$$p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^{i-1} = 1,$$

on déduit

$$q_i q_{i-1} R - p_i p_{i-1} = \frac{p_i - a q_{i-1}}{q_i},$$

d'où il suit que

$$\frac{p_i - a q_{i-1}}{q_i}$$

est une fonction entière. Mais, comme

$$\delta p_i > \delta q_i > \delta q_{i-1} \quad (1),$$

il est évident que $a q_{i-1}$ est le reste de la division de p_i par q_i. Par conséquent,

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{a q_{i-1}}{q_i},$$

ou

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \cfrac{1}{a^{-1} \cfrac{q_i}{q_{i-1}}}.$$

Mais

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i}}},$$

donc

$$\frac{a^{-1} q_i}{q_{i-1}} = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \ldots}},$$

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \cfrac{1}{a\alpha_3 + \ldots}},$$

D'après une propriété bien connue des fractions conti-

---

(1) δp_i est le degré de la fonction p_i (*Œuvres complètes*, t. I, p. 108 et suiv.).

nues, nous aurons (1)

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \cfrac{1}{\alpha_{i-1} + \cfrac{1}{\alpha_{i-2} + \dots + \cfrac{1}{\alpha_i}}}.$$

Donc

$$\alpha_i + \cfrac{1}{\alpha_{i-1} + \dots + \cfrac{1}{\alpha_1}} = a\alpha_1 + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \dots + \cfrac{1}{a^{\mp 1}\alpha_i}}.$$

Cette égalité entraîne les suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a\alpha_1, \\ \alpha_{i-1} &= a^{-1}\alpha_2, \\ \alpha_{i-2} &= a\alpha_3, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_1 &= a^{\mp 1}\alpha_i. \end{aligned}$$

Si i est impair, en posant

$$i = 2k + 1,$$

nous aurons

$$\alpha_{i-k} = a^{\pm 1}\alpha_{k+1},$$

ou

$$\alpha_{k+1} = a^{\pm 1}\alpha_{k+1},$$

$$a^{\pm 1} = 1,$$

et enfin

$$a = 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME III. — *Si, dans le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue, l'un des quotients complets y_i satisfait à l'équation*

$$ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

où

$$a = \pm(p_i^2 - q_i^2 R)$$

est une quantité constante, la fraction continue est nécessairement périodique.

---

(1) SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 30; 1866.

Démonstration. — Étant donné

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i + \cfrac{1}{y_i}}}}.$$

De l'équation

$$a y_i^2 + 2 b y_i + c = 0,$$

nous tirerons

$$y_i = \frac{-b + \sqrt{R}}{a},$$

$$y_i = \frac{-b + \alpha + \frac{1}{y}}{a},$$

et, en posant,

$$\frac{-b + \alpha}{a} = \beta,$$

nous aurons

$$y_i = \beta + \frac{1}{a y}.$$

Cela posé, distinguons, avec Abel, deux cas.

Premier cas. — Le nombre $i = 2k + 1$, k étant entier. Dans ce cas

$$a = 1,$$

donc

$$y_i = \beta + \frac{1}{y},$$

donc la fraction continue

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots}}}}}}$$

est évidemment périodique. En outre, nous avons vu que pour i impair

$$\alpha_{i-m} = \alpha_{m+1}.$$

En posant successivement

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots, (k-1), k,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_1, \\ \alpha_{i-1} &= \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{k+2} &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Par conséquent les quotients incomplets de la fraction continue formeront la série suivante

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_k, \quad \alpha_{k+1}, \quad \alpha_k, \quad \ldots, \quad \alpha_2, \quad \alpha_1, \quad \beta, \quad \ldots.$$

Deuxième cas. — Posons

$$i = 2k.$$

Nous avons

$$y_i = \beta + \frac{1}{ay}.$$

Mais

$$y = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i + \cfrac{1}{y_i}}}},$$

donc

$$ay = a\alpha_1 + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \cfrac{1}{a\alpha_3 + \ldots + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_i + \cfrac{1}{ay_i}}}}$$

ou

$$ay = a\alpha_1 + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \cfrac{1}{a\alpha_3 + \ldots + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_i + \cfrac{1}{a\beta + \cfrac{1}{y}}}}},$$

et par conséquent

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{a\alpha_1 + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \cfrac{1}{a\alpha_3 + \ldots + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_i + \cfrac{1}{a\beta + \cfrac{1}{\alpha_1 + \ldots}}}}}}}}}$$

Il suit de là que les quotients incomplets forment la série

$$\alpha,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_i,\quad \beta,$$
$$a\alpha_1,\quad a^{-1}\alpha_2,\quad a\alpha_3,\quad \ldots,\quad a^{-1}\alpha_i,\quad a\beta,\quad \alpha_1,\quad \ldots.$$

La période se compose des nombres suivants

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_i,\quad \beta,\quad a\alpha_1,\quad a^{-1}\alpha_2,\quad \ldots,\quad a^{-1}\alpha_i,\quad a\beta.$$

Ainsi, dans les deux cas, $\sqrt{R}$ se développe en fraction continue périodique. C. Q. F. D.