L. MALEYX

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 125-133

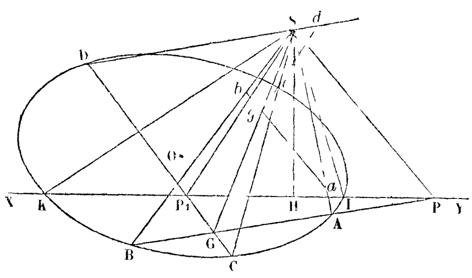
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__125_0>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DEFINITION (¹);

PAR M. L. MALEYX.

IX. *Propriété des sécantes rectangulaires à l'hyperbole équilatère.* — Soit O le cercle directeur et S le sommet d'un cône (*fig.* 72).

Fig. 72.



Supposons-le coupé par un plan suivant une hyperbole équilatère, le plan SXY mené par le sommet du cône parallèlement au plan sécant le coupera suivant les deux génératrices rectangulaires, SI, SK.

Dans le plan de la section imaginons deux droites rectangulaires, l'une sera parallèle à un diamètre transverse et rencontrera les deux branches de la courbe, l'autre sera parallèle à un diamètre non transverse et ne rencontrera que l'une des branches, soient ces cordes ab et cd. Menons par le sommet S, SP parallèle à ab et SP_1 parallèles à cd; l'une de ces droites sera extérieure à

(¹) Voir t. X (1891), p. 91.

l'angle droit KSI, soit SP, l'autre SP_1 lui sera intérieure, l'angle PSP_1 étant droit.

Le plan des parallèles ab, SP coupe le plan de la directrice suivant la droite PAB, et le cône suivant les génératrices SaA, SbB; celui des parallèles cd, SP_1 coupe le plan de la directrice suivant la droite CP_1D, et le cône suivant les génératrices ScC, dSD; de plus, les cordes rectangulaires, ab, cd, se coupent en un point g de l'intersection SG des deux plans dont on vient de parler. On démontrerait, comme au n° I du présent Chapitre, qu'on a les égalités

$$\frac{ga \times gb}{\mathrm{GA} \times \mathrm{GB}} = \frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{\mathrm{PA} \times \mathrm{PB}} \times \left(\frac{\mathrm{S}g}{\mathrm{SG}}\right)^2,$$

$$\frac{gc \times gd}{\mathrm{GC} \times \mathrm{GD}} = \frac{\overline{\mathrm{SP}_1}^2}{\mathrm{P}_1\mathrm{C} \times \mathrm{P}_1\mathrm{D}} \times \left(\frac{\mathrm{S}g}{\mathrm{SG}}\right)^2$$

ou, d'après les propriétés des sécantes au cercle,

$$\frac{ga \times gb}{\mathrm{GA} \times \mathrm{GB}} = \frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{\mathrm{PI} \times \mathrm{PK}} \times \left(\frac{\mathrm{S}g}{\mathrm{SG}}\right)^2,$$

$$\frac{gc \times gd}{\mathrm{GC} \times \mathrm{GD}} = \frac{\overline{\mathrm{SP}_1}^2}{\mathrm{P}_1\mathrm{I} \times \mathrm{P}_1\mathrm{K}} \times \left(\frac{\mathrm{S}g}{\mathrm{SG}}\right)^2.$$

Divisant membre à membre, en ayant égard à la propriété des sécantes au cercle,

$$\frac{ga \times gb}{gc \times gd} = \frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{\overline{\mathrm{SP}_1}^2} \times \frac{\mathrm{P}_1\mathrm{I} \times \mathrm{P}_1\mathrm{K}}{\mathrm{PI} \times \mathrm{PK}},$$

et, comme l'angle P_1SP est droit, si SH est perpendiculaire sur PP_1, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{\overline{\mathrm{SP}_1}^2} = \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{P}_1\mathrm{H}},$$

d'où, substituant,

$$\frac{ga \times gb}{gc \times gd} = \frac{\dfrac{\mathrm{P}_1\mathrm{I} \times \mathrm{P}_1\mathrm{K}}{\mathrm{P}_1\mathrm{H}}}{\dfrac{\mathrm{PI} \times \mathrm{PK}}{\mathrm{PH}}}.$$

Or SH est l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles KSI, P_1SP, et l'on sait, d'après ce qu'on a vu au nº I, Chap. II, théorème II, que l'un de ces cercles, le second par exemple, est le lieu des points dont les puissances, par rapport au premier, sont à la distance des mêmes points à leur axe radical dans un rapport constant convenablement choisi.

Il en résulte que les rapports $\frac{P_1I \times P_1K}{P_1H}$, $\frac{PI \times PK}{PH}$ sont numériquement égaux : dès lors le rapport $\frac{ga \times gb}{gc \times gd}$ est numériquement égal à 1; mais, comme les deux segments ga, gb sont de sens contraires, tandis que les deux autres gc, gd sont de même sens, on doit considérer ce rapport comme égal à -1.

De là on peut déduire le théorème suivant :

Si une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, elle passe par le point commun des hauteurs.

Et comme corollaire :

Si deux hyperboles équilatères ont quatre points communs, elles doivent coïncider, à moins que l'un des points ne soit le point commun des hauteurs d'un triangle dont les trois autres sont les sommets.

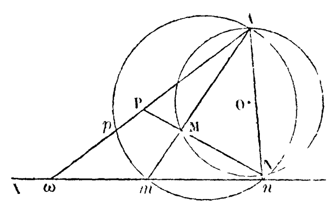
X. Théorème de Frégier. — *Si par un point de la circonférence d'un cercle on mène des parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique, la droite qui unit les seconds points communs de ces parallèles avec la circonférence passe par un point fixe qui porte le nom de* point de Frégier.

Soient O le cercle donné, A le point donné sur sa circonférence (*fig.* 73).

Menons par le point A les parallèles AM, AN à deux diamètres conjugués d'une conique située dans le même plan ; il s'agit de montrer que MN passe par un point fixe.

Les couples de droites, telles que AM, AN, forment un faisceau en involution ; transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant A pour pôle et

Fig. 73.



une puissance quelconque K ; la circonférence O a pour transformée la droite XY, et les points, tels que m et n, forment une involution, n° III ; Chap. II, soit ω le centre de cette involution : unissons $A\omega$ par une droite.

La droite dont MN fait partie a pour transformée la circonférence passant par les points A, m, n, et rencontrant $A\omega$ en p ; le point p est fixe à cause de l'égalité $\omega m \times \omega n = \omega A \times \omega p$, le premier membre étant fixe d'après la définition de l'involution. Or nous avons aussi, P étant le point où MN coupe $A\omega$,

$$Ap \times AP = K,$$

d'après notre transformation ; le point p et le nombre K étant fixes, il en est de même de P.

Le théorème de Frégier est encore vrai si au cercle on substitue une conique, cela se voit en considérant cette courbe comme la perspective d'un cercle.

L'application de ce théorème permet de construire facilement deux rayons d'un faisceau en involution faisant entre eux un angle donné, quand le faisceau est déterminé par deux autres couples de rayons conjugués, et, en particulier, de construire, en direction, deux diamètres conjugués d'une conique, dont on donne le centre, faisant entre eux un angle donné, quand on connaît les directions de deux autres couples de diamètres conjugués. Nous ne nous y arrêterons pas.

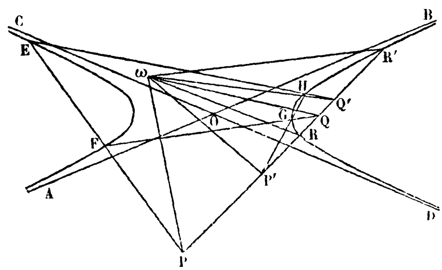
Comme seconde application très intéressante, on peut, au moyen de ce théorème, déterminer simplement les rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution de même sommet ou, ce qui revient au même, les diamètres conjugués communs de deux coniques concentriques. Il suffit pour cela de faire passer un cercle par le sommet commun des deux faisceaux, de déterminer le point de Frégier relatif à chacun d'eux et d'unir ces deux points par une droite; les points où la droite coupe le cercle appartiennent chacun à un des diamètres conjugués communs. On ramène à cette question celle de la détermination des diamètres conjugués parallèles de deux coniques situées, comme on voudra, dans le même plan.

Le point de Frégier s'est présenté spontanément dans la construction que nous avons donnée au Chapitre I, n° VI.

Théorème et applications. — *Si par un point du plan d'un quadrilatère on mène des couples de parallèles aux directions des asymptotes de chacune des hyperboles circonscrites au quadrilatère, ces couples de parallèles forment un faisceau en involution.*

Soient EFGH le quadrilatère, AOB, COD les asymptotes d'une hyperbole circonscrite (*fig.* 74). Coupons la figure par une droite quelconque, rencontrant les côtés du quadrilatère en P et P′, Q et Q′, et l'hyperbole en R et R′; puis unissons ces six points à un point fixe ω, pris arbitrairement dans le plan, par des lignes droites. D'après le théorème de DESARGUES, ces six droites forment un faisceau en involution, et il en sera encore ainsi si la sécante PR′ s'éloigne à l'infini; mais alors les rayons ωP et ωP′, ωQ et ωQ′ deviennent parallèles aux systèmes de côtés opposés au quadrilatère, ωR et ωR′ deviennent parallèles aux asymptotes de l'hyperbole;

Fig. 74.



donc les parallèles aux asymptotes de l'hyperbole menées par le point ω sont deux rayons conjugués du faisceau en involution, déterminé par les systèmes de parallèles aux côtés opposés du quadrilatère menées par le même point, ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème est susceptible d'applications nombreuses par son association à celui de FRÉGIER.

1° *On en déduit les directions des asymptotes de l'hyperbole passant par cinq points.* Il suffit pour cela de construire les rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution déterminés en menant par un point du plan des parallèles aux systèmes de côtés opposés de deux quadrilatères inscrits.

2° *On peut encore construire,* par ce moyen, *une hyperbole passant par quatre points donnés, connaissant l'angle des asymptotes;* on est ramené pour cela à déterminer deux rayons conjugués d'un faisceau en involution comme faisant entre eux un angle donné.

3° Comme cas particulier de la question précédente, on peut *construire une hyperbole équilatère passant par quatre points donnés* en recherchant les rayons conjugués rectangulaires d'un faisceau en involution défini.

On voit ainsi que le problème n'admet généralement qu'une solution; toutefois, et c'est là une REMARQUE IMPORTANTE, *si les couples de côtés opposés du quadrilatère étaient rectangulaires, c'est-à-dire si trois des points étaient sommets d'un triangle dont les hauteurs concourraient au quatrième point, le quadrilatère étant non convexe, les seules coniques qu'on peut lui circonscrire sont des hyperboles; en second lieu, deux des couples de directions asymptotiques, celles des systèmes de côtés opposés, étant rectangulaires, tous les systèmes de rayons conjugués du faisceau sont rectangulaires, et toutes les coniques circonscrites à ce quadrilatère sont des hyperboles équilatères*. Ces dernières conséquences complètent le théorème et le corollaire démontrés à la fin du n° IX du présent Chapitre.

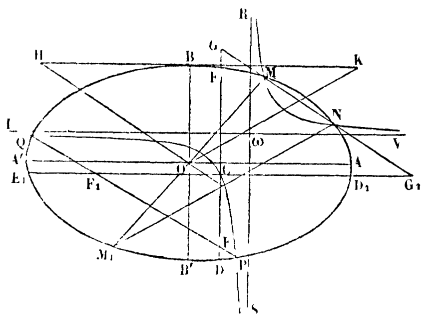
XII. THÉORÈME. — *Si l'on coupe une conique par une hyperbole équilatère, dont les asymptotes soient parallèles aux axes de la courbe, trois des points communs et le point diamétralement opposé au quatrième, dans la conique, sont situés sur un même cercle.*

Démontrons le théorème pour le cas où la conique est une ellipse, la démonstration pour le cas où elle est une hyperbole est entièrement analogue, et l'on peut conclure qu'il est vrai pour la parabole, en la considérant comme limite de l'une des courbes précédentes.

Soient O l'ellipse dont les axes sont AA', BB' (*fig.* 75); ω l'hyperbole équilatère dont les asymptotes VT, RS sont respectivement parallèles à AA', BB'. Soient les quatre points communs des deux courbes M, N, P, Q, et M_1 diamétralement opposé à M dans l'ellipse.

Prenons un point quelconque C sur l'hyperbole et menons par ce point des parallèles aux asymptotes ; l'ellipse, l'hyperbole et le système des sécantes rectilignes

Fig. 75.



MN, PQ, déterminent sur chacune de ces parallèles un système de six points en involution (théorème de Desargues) et comme dans ces deux involutions le point conjugué de C est à l'infini, C est le centre de chacune d'elles. De là les deux égalités

$$CE \times CD = CF \times CG \qquad \text{et} \qquad CE_1 \times CD_1 = CF_1 \times CG_1.$$

Divisons membre à membre en tenant compte du théorème de Newton,

$$\frac{CE \times CD}{CE_1 \times CD_1} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{CF \times CG}{CF_1 \times CG_1},$$

en désignant par a et b les demi-axes de l'ellipse.

Unissons M_1N par une ligne droite : MN, M_1N forment un système de cordes supplémentaires, et les diamètres OK, OH, qui les divisent en parties égales et sont chacun parallèles à celle qu'il ne coupe pas, sont conjugués. Ces diamètres interceptent sur la tangente en B les segments BH, BK, dont le produit est égal à a^2 (n° IV, Chap. II) ; de là

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{b}{\mathrm{BH}} \times \frac{b}{\mathrm{BK}},$$

et, par comparaison avec l'égalité précédente,

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CF}_1} \times \frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{CG}_1} = \frac{b}{\mathrm{BH}} \times \frac{b}{\mathrm{BK}}.$$

Les deux triangles rectangles BOH, GCG_1 sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles, d'où

$$\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{CG}_1} = \frac{b}{\mathrm{BH}};$$

d'après l'égalité précédente, il en résulte

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CF}_1} = \frac{b}{\mathrm{BK}}.$$

Donc les deux triangles rectangles BOK, CFF_1 sont semblables, leurs angles sont égaux et leurs hypoténuses OK, FF_1 sont également inclinées sur BK et CF_1, ou sur la parallèle AA'; il en est de même de PQ et $\mathrm{M}_1\mathrm{N}$ parallèle à OK; donc les points P, Q, N, M_1 appartiennent à un cercle (n° VI du précédent Chapitre).

C. Q. F. D.

(*A suivre.*)