NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. MARCHAND

Le théorème de Dupuis et la cyclide de Dupin

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 98-115

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__98_0>

LE THÉORÈME DE DUPUIS ET LA CYCLIDE DE DUPIN;

PAR M. E. MARCHAND.

1. *Énoncé du problème.* — Tous les géomètres connaissent la belle propriété découverte par Dupuis, ancien élève de l'École Polytechnique, mort au commencement de ce siècle :

« Quand une sphère variable ω touche constamment de la même manière trois sphères fixes A, B, C, chacun des trois points de contact décrit un petit cercle de la sphère fixe correspondante. » (*Traité de Géométrie*, par E. Rouché et Ch. de Comberousse, 5e édition, p. 267.)

Ce théorème, indépendamment de sa valeur propre, se recommande à l'attention comme ayant conduit à la solution d'une question non moins difficile qu'importante du VIIe Livre de *Géométrie*. « Les auteurs qui se sont occupés de la construction d'une sphère tangente à quatre sphères données (Gaultier de Tours, ...; Heegmann, ...; J.-A. Serret, ...; etc.) ont fondé leur démonstration sur le théorème de Dupuis. Au lieu de suivre cette marche, qui rompt l'analogie avec la solution du problème correspondant de Géométrie plane, nous avons tenu à conserver complètement cette analogie et à traiter directement la question sans le secours du théorème de Dupuis, qui n'est plus alors qu'un corollaire immédiat de la solution trouvée. » (*Géométrie*, par E. Rouché et Ch. de Comberousse, p. 267.)

Toute la difficulté consiste donc à établir la célèbre construction donnée par Gergonne pour le problème d'Apollonius; cercle tangent à trois cercles donnés. Les solutions ainsi obtenues sont irréprochables au double point de vue de la rigueur et de la simplicité; mais il ne me semble pas sans intérêt de chercher à les compléter; car « en général, comme le remarque Chasles, il ne suffit pas qu'une proposition soit vraie pour qu'on puisse en faire un usage utile en Mathématiques, il faut encore connaître toutes ses dépendances avec les diverses propositions qui se rattachent au même sujet ». (*Géométrie*, par Rouché et de Comberousse, p. 233.)

Or, pour peu que l'on ait étudié les propriétés les plus simples de la cyclide de Charles Dupin [*Étude analytique sur la cyclide*, par H. Lemonnier (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1870)], on reconnaît que les sphères tangentes à trois sphères fixes forment précisément l'un des modes de génération de cette surface. La cyclide particulière dont il est question ici, c'est-à-dire la surface du quatrième ordre qu'on obtiendrait en transformant le tore par rayons vecteurs réciproques, a été trouvée par Dupin comme solution d'un problème de Calcul intégral : « Déterminer toutes les surfaces dont les lignes de courbure des deux systèmes sont des cercles. » (Dupin, *Applications de Géométrie et de Méchanique*, p. 200 et suiv., 1822.) Ayant l'intention de ne m'appuyer que sur la Géométrie élémentaire, je laisserai de côté cette définition; mais, afin de montrer dès à présent l'intérêt que peuvent présenter ces recherches, je résume rapidement les propriétés évidentes qui résulteront de la considération de la cyclide.

Le lieu du centre d'une sphère variable ω, touchant constamment de la même manière trois sphères fixes de centres A, B, C, est une conique (E) dont le plan est perpendiculaire au plan ABC. La conique (G), focale de (E), passe par les trois points A, B, C; on connaît ses tangentes en A, B, C, et l'on sait de plus qu'elle est bitangente au cercle qui coupe orthogonalement les trois sphères A, B, C.

La cyclide de Dupin étant aussi l'enveloppe d'une seconde famille de sphères A, B, C, ..., dont les centres décrivent la conique (G), le théorème de Dupuis revient à dire que chaque sphère enveloppée telle que A est tangente à sa surface enveloppe en tous les points d'un cercle. Or ce résultat peut se voir géométriquement par la méthode indiquée en Géométrie descriptive, lorsqu'il s'agit de démontrer que le contour apparent d'un tore est une courbe parallèle à l'ellipse.

Le problème de Géométrie plane consistant à déterminer deux cercles ω, ω' tangents aux trois cercles A, B, C est identique à ce problème de Géométrie à trois dimensions : « Déterminer la section de la cyclide par un plan passant par les centres de trois sphères A, B, C appartenant à un même mode de génération. »

Les propriétés de la cyclide indiquent immédiatement qu'on peut remplacer les trois cercles A, B, C par trois autres cercles quelconques ayant leurs centres sur une conique déterminée (G) et coupant orthogonalement un cercle fixe, le cercle orthogonal des trois cercles A, B, C. Inversement, la figure plane relative au problème d'Apollonius permettra de se rendre compte avec précision de la génération de la cyclide de Dupin, ainsi que de sa forme extérieure; la surface se présentera comme presque aussi simple que le tore et aussi facilement accessible aux procédés de la Géométrie descriptive. On obtiendra ainsi un exemple de surface enveloppe se traitant complètement et simplement sans autre considération infinitésimale que celle du plan tangent à la sphère.

Il me reste maintenant à justifier toutes ces assertions. La méthode analytique pourrait conduire au but de la manière la plus satisfaisante, et, à ce propos, je dois avouer que l'idée première et la substance de ce travail m'ont été fournies par la théorie des coniques focales et de la cyclide de Dupin, telle que nous l'a présentée M. Darboux dans son Cours de l'École Normale, en 1875. Le mode de démonstration employé ne laisserait subsister aucun doute sur la possibilité d'arriver aux mêmes conséquences par la Géométrie pure de Poncelet et de Chasles; mais, pour éviter toute ambiguïté, je m'efforcerai de ne faire usage que des théorèmes contenus dans tous les Traités classiques de Géométrie élémentaire.

2. *Propriétés focales.* — Si l'on se reporte à la solution du problème : « Placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole sur un cône de révolution » (*Géométrie,* par E. Rouché et de Comberousse, n° 1082), on constate aussitôt que l'on a : soit

$$SA' - SA = 2c \qquad (\textit{fig. } 562);$$

soit

$$SA' + SA = 2c \qquad (\textit{fig. } 563).$$

Le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une ellipse donnée (E) est donc une hyperbole (H) dont le plan perpendiculaire à celui de l'ellipse passe par le grand axe de l'ellipse; l'hyperbole admet comme foyers les sommets de l'ellipse et comme sommets les foyers de l'ellipse. On voit sur la figure (*fig.* 562) que l'axe du cône de révolution en chaque point S est précisément la tangente à l'hyperbole (H) en ce point. Inversement, on trouverait comme lieu des sommets des cônes de révolution passant par l'hyperbole (H) l'ellipse (E), et l'axe du cône est en chaque point la tangente à l'ellipse.

Je désigne par Δ la droite d'intersection du plan Q de l'ellipse (E) avec le plan P normal à l'hyperbole au point S, et je veux démontrer que le rapport des distances de tout point M de l'ellipse au point fixe S et à la droite fixe Δ est constant et égal à $\frac{c}{a}$.

En effet, le plan P normal en S à l'hyperbole est perpendiculaire à l'axe du cône de révolution qui a pour sommet S et l'ellipse (E) pour directrice. Or, le rapport des distances de tout point de la surface d'un cône de révolution S au sommet S et à un plan P perpendiculaire à l'axe et mené par le sommet est constant et égal à $\frac{1}{\cos\beta}$, 2β étant l'angle au sommet du cône. D'autre part, les distances d'un point quelconque du plan Q de l'ellipse (E) au plan P et à l'intersection Δ des deux plans P et Q sont aussi dans un rapport constant.

Le rapport des distances d'un point de l'ellipse à S et à Δ est donc constant, et l'on aura sa valeur en le déterminant pour un point particulier, par exemple pour le sommet A (*fig.* 562).

Réciproquement, tout point S de l'espace, jouissant de la propriété que le rapport des distances d'un point quelconque M d'une ellipse (E) à ce point et à une droite fixe Δ du plan de l'ellipse soit constant, est le sommet d'un cône de révolution passant par (E). En effet, si l'on mène le plan P passant par Δ et S, le rapport des distances de tout point M de l'ellipse à P et à S sera constant, ce qui signifie que la droite SM fait un angle constant avec le plan P.

Il est dès lors tout naturel d'appeler les points tels que S des foyers de l'ellipse. Le lieu des foyers d'une ellipse (E) dans l'espace est une hyperbole (H) et, réciproquement, le lieu des foyers de l'hyperbole (H) est l'ellipse (E). Ces deux courbes associées (E), (H) forment ce qu'on appelle un *système de coniques focales.*

A chaque foyer S de la conique (E) correspond une directrice Δ située dans le plan de la conique. Toutes ces directrices sont parallèles entre elles, et le rapport $\frac{MS}{M\Delta}$ des distances à un foyer et à la directrice correspondante reste invariablement égal à l'excentricité $\frac{c}{a}$. On aura alors, en prenant deux foyers distincts,

$$\frac{MS}{M\Delta} = \frac{MS'}{M\Delta'} = \frac{c}{a} = \frac{MS \pm MS'}{M\Delta \pm M\Delta'},$$

d'où il résulte que la somme ou la différence des distances de tous les points d'une conique à deux foyers distincts reste constante. En examinant successivement tous les cas qui peuvent se présenter, on arrive à cette conclusion :

Soient F_1 et F_2 deux foyers quelconques, D_1 et D_2 les directrices correspondantes; pour tout point M de la conique situé entre D_1 et D_2, la somme des distances est constante; pour tout point M' de la conique non situé entre D_1 et D_2, la différence est constante.

Si, la conique étant une ellipse, F_1 et F_2 sont sur une même branche d'hyperbole focale, c'est toujours la différence qui est constante; si, dans les mêmes conditions, F_1 et F_2 sont sur deux branches différentes de l'hyperbole focale, ce qui est le cas des foyers ordinaires, on a toujours à prendre la somme.

Dans le cas où F_1 et F_2 sont deux foyers d'hyperboles, la différence reste constante en valeur absolue, mais son signe change quand on passe d'une branche de la courbe à l'autre.

Ces résultats se déduisent d'ailleurs immédiatement par continuité de ceux relatifs aux foyers ordinaires.

3. *Problème d'Apollonius. Cercles tangents à trois cercles donnés.* — La solution de Gergonne, que je supposerai connue, apprend (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, *fig.* 239) que deux cercles tangents d'un même groupe ω et ω' admettent le centre radical S de A, B, C comme centre de similitude et l'axe de similitude A'B'C' comme axe radical. La droite $\omega\omega'$ passe donc par S et est perpendiculaire à A'B'C', résultat qui sera utilisé plus loin. On voit en outre que deux cercles d'un même groupe sont en même temps réels ou imaginaires, mais il ne m'a pas semblé facile d'obtenir par cette méthode le nombre de solutions réelles correspondant à chaque système de positions relatives des trois cercles donnés A, B, C.

L'artifice employé dans le II^e Livre de *Géométrie* pour mener les tangentes communes à deux cercles me paraît très propre à donner une discussion exclusivement géométrique. Il y aurait toutefois lieu de le préciser grâce à l'emploi de cycles au lieu de cercles (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, p. 271). En effet, nous allons être amené à reconnaître qu'il ne serait pas vrai de dire d'une manière générale que, si un cercle d'un des groupes touche A extérieurement, et B et C intérieurement, le second cercle du même groupe touche A intérieurement, et B et C extérieurement. Au contraire, il est toujours exact de dire que la détermination de deux cercles d'un même groupe revient à « construire un cycle touchant trois cycles donnés » (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, p. 279). Quoi qu'il en soit, je ferai le calcul en m'appuyant sur la formule qui donne la distance tangentielle de deux cycles (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, p. 277). Si l'on prend pour axe des x l'axe de transformation et pour axe des y une droite perpendiculaire : si l'on désigne en outre par

R et r les rayons des deux cycles, par P et p les abscisses et par D et d les ordonnées de leurs centres, la formule en question peut s'écrire

$$T^2 = (P - p)^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2.$$

Si donc les cycles donnés A, B, C sont représentés respectivement par (P, D, R), (P′, D′, R′), (P″, D″, R″) et le cycle inconnu ω par (p, d, r), on a, pour déterminer les trois inconnues p, d, r, les trois équations

$$(1)\quad \begin{cases} (P - p)^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2 = 0, \\ (P' - p)^2 + (D' - d)^2 - (R' - r)^2 = 0, \\ (P'' - p)^2 + (D'' - d)^2 - (R'' - r)^2 = 0. \end{cases}$$

On peut évidemment prendre $P = D = 0$, et alors, en posant $R - r = \rho$ et retranchant successivement la première équation (1) des deux autres, on est ramené à

$$(2)\quad \begin{cases} p^2 + d^2 - \rho^2 = 0, \\ P'p + D'd + (R' - R)\rho = F, \\ P''p + D''d + (R'' - R)\rho = G, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} F = \frac{1}{2}[P'^2 + D'^2 - (R' - R)^2], \\ G = \frac{1}{2}[P''^2 + D''^2 - (R'' - R)^2]. \end{cases}$$

Un procédé commode pour résoudre les équations (2) consiste à remarquer que ces équations ont pour conséquence

$$(4)\quad \begin{vmatrix} p & d & -\rho\sqrt{-1} \\ P' & D' & (R' - R)\sqrt{-1} \\ P'' & D'' & (R'' - R)\sqrt{-1} \end{vmatrix}^2 = \text{const}.$$

Posant, pour abréger,

$$H = \frac{1}{2}[(P' - P'')^2 + (D' - D'')^2 - (R' - R'')^2],$$

ou trouve, par un calcul facile,

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} p & d & -\rho \\ P' & D' & R'-R \\ P'' & D'' & R''-R \end{vmatrix} = \sqrt{2FGH}.$$

Remplaçant la première des équations (2) par (5), on aperçoit immédiatement que l'on aura deux solutions réelles pour $FGH > 0$ et deux solutions imaginaires pour $FGH < 0$.

D'après la théorie des cycles, les équations (2) et (5) s'interprètent aussi bien pour R, R' ou R'' négatifs que pour R, R', R'' positifs. Mettant les signes des rayons en évidence, on voit que, A, B, C étant les centres des trois cercles, la discussion dépendra des six quantités suivantes :

$$2F = \overline{BC}^2 - (R'-R'')^2, \qquad 2F' = \overline{BC}^2 - (R'+R'')^2,$$
$$2G = \overline{CA}^2 - (R''-R)^2, \qquad 2G' = \overline{CA}^2 - (R''+R)^2,$$
$$2H = \overline{AB}^2 - (R-R')^2, \qquad 2H' = \overline{AB}^2 - (R+R')^2.$$

Les cycles ω, ω', tangents à trois cycles A, B, C de même sens, seront réels si $FGH > 0$, et imaginaires si $FGH < 0$. Les cycles ω, ω', tangents à trois cycles A, B, C dont deux, B et C, ont un même sens et le troisième, A, le sens contraire, seront réels si $FG'H' > 0$, et imaginaires si $FG'H' < 0$.

Or $F < 0$ indique que les cercles B et C sont intérieurs l'un à l'autre, $F > 0$ qu'ils sont sécants ou extérieurs, $F' < 0$ qu'ils sont intérieurs ou sécants, $F' > 0$ qu'ils sont extérieurs.

Il sera dès lors facile d'obtenir tout ce qu'on désire. Laissant de côté les cas particuliers où deux ou trois des cercles donnés sont tangents entre eux, il n'y a que trois positions relatives possibles pour deux cercles tels que B et C; ils sont intérieurs, sécants ou extérieurs. Pour trois cercles A, B, C, considérés deux à deux, le nombre de positions relatives possibles est le nombre de combinaisons avec répétition de trois objets trois à trois, c'est-à-dire $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. Je désignerai les dix positions par ces abréviations faciles à comprendre :

EEE, SSS, III, EES, EEI, ESS, EII, SSI, SII, ESI.

Chacun des cas EEE, EII, SSS donne huit solutions. En effet :

1° EEE

$$F > 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' > 0, \quad G' > 0, \quad H' > 0;$$
$$FGH > 0, \quad FG'H' > 0, \quad F'GH' > 0, \quad F'G'H > 0;$$

2° EII

$$F > 0, \quad G < 0, \quad H < 0, \quad F' > 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0;$$

3° SSS

$$F > 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' < 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0.$$

Le deuxième cas EII montre très nettement qu'il n'y a pas lieu de dire que si ω touche B et C extérieurement, A intérieurement, ω' touche B et C intérieurement, A extérieurement. On pourrait d'aillenrs s'en persuader même en se bornant au premier cas EEE.

On a quatre solutions pour EES, ESS, SSI, SII, ESI :

4° EES

$$F > 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' < 0, \quad G' > 0, \quad H' > 0;$$

5° ESS

$$F > 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' > 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0;$$

6° SSI

$F < 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' < 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0;$

7° SII

$F > 0, \quad G < 0, \quad H < 0, \quad F' < 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0;$

8° ESI

$F > 0, \quad G > 0, \quad H < 0, \quad F' > 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0.$

Enfin, on ne trouve aucune solution pour EEI et III :

9° EEI

$F < 0, \quad G > 0, \quad H > 0, \quad F' < 0, \quad G' > 0, \quad H' > 0;$

10° III

$F < 0, \quad G < 0, \quad H < 0, \quad F' < 0, \quad G' < 0, \quad H' < 0.$

En résumé, sur dix cas, trois donnent huit solutions; cinq en donnent quatre; deux n'en donnent aucune. Le nombre de solutions est toujours un multiple de 4.

Si l'on se reporte à la *fig.* 239 de la *Géométrie,* par Rouché et de Comberousse, et qu'on considère A, B, C comme les centres de trois sphères, il est clair que le cercle de Dupuis, relatif à la sphère A, est à l'intersection de cette sphère et du plan vertical ayant aa' comme trace horizontale. Les cercles de Dupuis seront donc réels ou imaginaires en même temps que les cercles ω et ω'. On est donc ramené à la question précédente. Sur chaque sphère A le nombre des cercles de Dupuis réels est 4 ou 2. Le Tableau de discussion précédent s'applique sans modification, les sphères A, B, C étant intérieures, sécantes ou extérieures en même temps que leurs cercles d'intersection par le plan ABC.

4. *Généralisation du cercle directeur.* — Les centres ω et ω' (voir *fig.* 239, *Géométrie,* Rouché et de Combe-

rousse) de deux cercles d'un même groupe sont toujours les foyers d'une conique, ellipse ou hyperbole suivant les cas, qui passe par les centres A, B, C des trois cercles donnés.

Pour le démontrer, on pourrait examiner successivement les dix cas énumérés dans le numéro précédent. Cette étude serait nécessaire, si l'on voulait connaître avec précision la position relative des cercles A, B, C et de la conique; elle permettrait, dans le cas de l'hyperbole, de décider si A, B et C sont ou ne sont pas sur la même branche. Mais on serait exposé à oublier certains cas particuliers, ce qui enlèverait à la démonstration la rigueur désirable.

Je m'appuierai sur ce théorème, facile à démontrer, que tous les cercles A, B, C, ... tangents à deux cycles donnés ω et ω' ont leurs centres sur une conique. Pour l'établir par le calcul, il suffirait d'éliminer r entre les deux premières équations (1) du numéro précédent; P, D, P' D', R, R' étant des constantes; p, d les coordonnées d'un point du lieu. La démonstration purement géométrique ne présente pas de difficultés. Les cercles de centres ω et ω' peuvent être extérieurs, sécants ou intérieurs; cela fait seulement trois cas dont chacun se décompose en deux nouveaux cas, suivant que l'on considère deux cycles de même sens ou de sens contraires. Dans chacun des six cas, il est facile de voir dans quelles régions du plan peuvent se trouver les centres A, B, C.

La *fig.* 239 montre aussitôt que les tangentes en A, B, C sont les perpendiculaires abaissées de ces points sur les cordes aa', bb', cc'. En effet, d'après les propriétés focales, la tangente en A doit être bissectrice de l'angle des rayons vecteurs $\omega A a$, $\omega' a' A$.

La conique, lieu du point A, se trouve ici caractérisée par une propriété qui est une généralisation évidente de celle dn cercle directeur : « Le lieu des centres des cercles tangents à un cercle de centre F' et passant par un point F est une conique dont F et F' sont les foyers. » Si le cercle ω' se réduit à un point, le cercle ω devient le cercle directeur.

Sur la *fig.* 239 on voit que toutes les cordes de contact aa' passent par le centre de similitude S des deux cercles ω et ω' et que la tangente en A est la perpendiculaire abaissée de A sur aa'. Si ω' se réduit à un point, le point a' vient en ω', le point a est le symétrique du foyer par rapport à la tangente et l'on retrouve la construction bien connue de la tangente.

Ces considérations générales fournissent en outre l'explication du rôle théorique que joue, dans le problème d'Apollonius, le cercle orthogonal aux trois cercles A, B, C. Le cercle orthogonal rencontre le cercle A en deux points O et O' que l'on détermine en menant des tangentes du centre radical S au cercle A. Comme A_1 est le pôle de aa'S relativement au cercle A (*fig.* 239), la droite OO' passe par A_1. On a donc cet énoncé : Le cercle orthogonal des trois cercles A, B, C admet comme axe radical avec le cercle A une droite OO' qui rencontre en A_1 l'axe de similitude A'B'C' (*fig.* 239); la polaire de A_1 relativement au cercle A est la corde de contact cherchée aa'. D'autre part, on a évidemment

$$A_1O.A_1O' = \overline{A_1a}^2 = \overline{A_1a'}^2;$$

le point A_1 a même puissance par rapport au cercle orthogonal et aux deux cercles ω et ω'. Il en sera de même des points B_1 et C_1, de sorte que A'B'C' est l'axe radical commun des cercles ω et ω' et du cercle orthogonal. Si ω et ω' se coupent en deux points réels, le cercle orthogonal passera aussi par ces deux points; ce résultat est d'ailleurs d'évidence immédiate. Chaque point de la conique ABC est centre d'un cercle tangent à la fois à ω et ω', la corde des contacts passant par S; puisque, pour des points antihomologues a et a', le produit $Sa.Sa'$ est constant, tous ces cercles coupent orthogonalement le cercle orthogonal à A, B et C; or, si ω et ω' se coupent en un point réel M, M sera le centre d'un cercle de rayon nul tangent à la fois à ω et ω' et devant couper orthogonalement le cercle orthogonal; M sera sur le cercle orthogonal, et la tangente à la conique en ce point sera précisément la tangente au cercle orthogonal, car MS est bissectrice du triangle $M\omega\omega'$, vu que le point S, centre de similitude, divise la ligne des centres $\omega\omega'$ dans le rapport des rayons. Le cercle orthogonal ne peut d'ailleurs pas rencontrer la conique ABC en d'autres points; car si le rayon R du cercle de centre A est différent de zéro, le carré du rayon du cercle orthogonal est $\overline{SA}^2 - R^2$, ce qui indique que le point A lui est extérieur.

On aurait été conduit tout naturellement à cette propriété du cercle orthogonal d'être tangent à la conique ABC aux points où il la rencontre en remarquant que la conique ABC est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe, le cercle orthogonal, et à une droite fixe, l'axe de similitude, est constant. En effet, la distance d'un cercle A de rayon R au cercle orthogonal est R; d'autre part, la démonstration de Gergonne apprend que trois cercles quelconques A, B, C tangents aux cycles ω et ω' admettent l'axe radical de ω et ω' comme axe de similitude, et les distances de trois cercles à un axe de similitude sont proportionnelles aux rayons. Or on sait, d'après le théorème de Daudelin, que « le lieu des points A, B, C, tels que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant, est une section conique » (*Géométrie,* Rouché et de Comberousse, n° 1081). On retrouverait ainsi, par voie purement géométrique, des résultats dont j'aurai besoin dans la suite; mais j'ai cru devoir renoncer à cette méthode, à cause d'une difficulté inattendue que j'expliquerai plus loin (n° 8).

Pour terminer, je résume les résultats très simples qui suffiront à la définition de la cyclide. Soient ω et ω', les foyers d'une ellipse et $2a$ la longueur du grand axe. La généralisation de la notion du cercle directeur montre, d'une manière presque intuitive, que tout point de l'ellipse peut être considéré comme centre d'un cercle de rayon ρ tangent à deux cercles fixes, l'un de centre ω et de rayon k, l'autre de centre ω' et de rayon $2a - k$, k étant un nombre fixe choisi arbitrairement. Les deux foyers ayant des propriétés identiques, on pourra toujours supposer $k < 2a - k$, c'est-à-dire k inférieur à a.

Si k varie de 0 à $a - c$, les deux cercles de centres ω et ω' sont intérieurs; on doit les considérer comme cycles de sens contraires et la *fig.* 239 fait voir très nettement le résultat. Pour $k = a - c$, les deux cercles directeurs deviennent tangents. Lorsque k varie de $a - c$ à a, les deux cercles directeurs deviennent sécants; leurs points d'intersection réels sont situés sur l'ellipse et la droite qui les joint, confondue d'abord avec la tangente à l'extrémité du grand axe, se déplace parallèlement à elle-même, toujours dans le même sens, jusqu'à venir coïncider avec le petit axe. Le résultat est encore facile à apercevoir; la *fig.* 239 en montrerait un exemple très net, si l'on menait les deux cercles qui touchent, l'un B et C intérieurement et A extérieurement, l'autre B et C extérieurement et A intérieurement. Enfin, pour k négatif, les cercles directeurs sont toujours intérieurs l'un à l'autre, mais il faut les considérer comme cycles de même sens. Le cercle de rayon ρ ayant son centre en un point de l'ellipse est intérieur au grand cercle directeur, mais comprend à son intérieur le petit cercle directeur. On verra nettement la figure en imaginant trois cercles A, B, C sécants deux à deux, représentant les sections, par le plan des centres, de trois sphères se coupant en deux points réels, et en menant les cercles ω et ω' qui touchent à la fois extérieurement ou intérieurement les trois cercles donnés.

En tout il n'existe que trois cas distincts pour l'ellipse, comme on le vérifierait encore en examinant successivement les dix cas indiqués dans la discussion du problème d'Apollonius (n° 3).

6. *Cercles de Dupuis.* — La *fig.* 239 peut être examinée à un nouveau point de vue. Au lieu de cercles de centres A, B, C, ω, ω', imaginons les sphères dont ces cercles représentent les sections par le plan de la figure. Pour préciser, je me bornerai au cas où le lieu des centres A, B, C, ... est une ellipse. On a donc une ellipse ayant pour foyers ω et ω'; les foyers sont centres de deux sphères fixes de rayons k et $2a - k$; chaque point tel que A de l'ellipse est centre d'une sphère de rayon ρ tangente aux deux sphères fixes.

Cela posé, tout point de l'hyperbole focale qui coupe en ω et ω' le plan du tableau peut être regardé comme centre d'une sphère de rayon fixe, tangente à la fois à toutes les sphères de rayon ρ dont le centre est un point de l'ellipse ABC. La démonstration repose sur la propriété énoncée à la fin du n° 2. Soit M un point de l'hyperbole focale, situé par exemple sur la même branche que le foyer ω, centre du cercle directeur de rayon k. Si l'on désigne par d la distance du point M à un point quelconque A de l'ellipse, on doit avoir, 2α désignant une constante,

$$d-(\rho+k)=2\alpha.$$

On en tire

$$d=\rho+(2\alpha+k).$$

Comme $2\alpha+k$ est une constante, le théorème est démontré. La quantité k peut être négative; comme 2α varie avec le point M, on voit que lorsque k est négatif, $2\alpha+k$ peut être négatif ou positif. Voici alors ce qui a lieu. Les trois sphères A, B, C se coupent en deux points réels P et Q situés sur l'hyperbole focale. Pour tout point M de l'hyperbole situé comme ω entre P et Q, c'est-à-dire à l'intérieur des trois sphères, la sphère fixe de centre M est intérieure à toutes les sphères A, B, C, ... Pour tout point de l'hyperbole focale non situé entre P et Q, la sphère fixe de centre M touche extérieurement toutes les sphères telles que A, B, C, ...

Le point de contact de la sphère de centre A avec la sphère de centre M est sur la droite AM. Le lieu des points de contact avec la sphère A de toutes les sphères ayant leurs centres aux divers points de l'hyperbole focale sera l'intersection de la sphère A avec le cône lieu de AM. Or on a démontré (n° 2) que le cône qui a pour sommet un point quelconque A de l'ellipse focale et pour base l'hyperbole M est de révolution et a pour axe la tangente à l'ellipse ABC en A. L'intersection avec la sphère A est donc un petit cercle dont le plan est perpendiculaire au plan de l'ellipse ABC. Comme on connaît déjà deux points a, a' (*fig.* 239) de l'intersection, il devient évident que le lieu des points de contact est le petit cercle vertical, intersection de la sphère A par le plan vertical aa'. On trouve précisément le cercle de Dupuis. Si, d'ailleurs, on se reporte au problème de la sphère tangente à quatre sphères données (*Géomé-*

trie Rouché et de Comberousse, n° 952), il est facile de constater que le centre de toute sphère de Dupuis est dans le même plan que l'hyperbole focale. En effet, les deux sphères ω et ω', tangentes aux sphères fixes A, B, C, D (*Géométrie* Rouché et de Comberousse, p. 266 et 267), admettant pour centre de similitude le centre radical des quatre sphères et pour plan radical le plan de similitude, leurs centres seront sur la perpendiculaire abaissée du centre radical sur le plan de similitude. En se reportant à la *fig.* 239, on voit que cette perpendiculaire est dans le plan vertical mené par S perpendiculairement à la droite $A'B'C'$. L'intersection du plan qui doit contenir les centres de toutes les sphères de Dupuis avec le cône de sommet A s'appuyant sur le cercle de Dupuis est, d'après ce qui précède, l'hyperbole focale. On est donc certain d'avoir obtenu, au moyen de l'hyperbole focale, toutes les sphères tangentes à la fois aux trois sphères fixes données A, B, C. (*A suivre.*)