

MAURICE D'OCAGNE

**Sur les séries récurrentes**

*Nouvelles annales de mathématiques* 3<sup>e</sup> série, tome 9  
(1890), p. 93-97

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1890\\_3\\_9\\_\\_93\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__93_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SUR LES SÉRIES RÉCURRENTES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

---

1. J'ai démontré dans ma *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 65) que le terme général  $U_n$  d'une série récurrente, définie par les valeurs des  $p$  premiers termes  $U_0, U_1, \dots, U_{p-1}$  et par l'échelle de récurrence

$$U_n = a_1 U_{n-1} + a_2 U_{n-2} + \dots + a_p U_{n-p},$$

pouvait s'exprimer en fonction linéaire de  $p$  termes consécutifs de la série *fondamentale* correspondante, définie par la même échelle de récurrence

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_p u_{n-p},$$

avec les valeurs initiales

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad \dots, \quad u_{p-2} = 0, \quad u_{p-1} = 1 \quad (^1).$$

En raison de l'importance de ce résultat, que j'ai eu

---

(<sup>1</sup>) *Loc. cit.*, p. 80.



2. Le problème dont il s'agit est le suivant :

*Trouver (lorsqu'elle existe) la somme S de la série*

$$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots + \text{ad inf.},$$

*en fonction de  $U_0, U_1, \dots, U_{p-1}, a_1, a_2, \dots, a_p$  qui sont les données de la question.*

Voyons d'abord comment la formule de Lagrange s'appliquerait à ce problème. Lagrange a démontré que

$$(2) \quad U_n = \alpha_1 \rho_1^n + \alpha_2 \rho_2^n + \dots + \alpha_p \rho_p^n.$$

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  étant les racines supposées inégales de l'équation (dite *génératrice*)

$$\varphi(x) = x^p - a_1 x^{p-1} - a_2 x^{p-2} - \dots - a_p = 0$$

et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  des coefficients qui se déterminent en faisant successivement dans (2)  $n = 0, 1, 2, \dots, p-1$ , ce qui donne les  $p$  équations linéaires

$$(3) \quad U_i = \alpha_1 \rho_1^i + \alpha_2 \rho_2^i + \dots + \alpha_p \rho_p^i \quad (i = 0, 1, \dots, p-1).$$

La formule (2) donne

$$\sum_{v=0}^{v=n} U_v = \alpha_1 \frac{\rho_1^{n+1} - 1}{\rho_1 - 1} + \alpha_2 \frac{\rho_2^{n+1} - 1}{\rho_2 - 1} + \dots + \alpha_p \frac{\rho_p^{n+1} - 1}{\rho_p - 1}.$$

Si donc, toutes les racines  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  ont un module inférieur à l'unité, on a, à la limite, lorsque  $n$  croît indéfiniment,

$$S = \frac{\alpha_1}{1 - \rho_1} + \frac{\alpha_2}{1 - \rho_2} + \dots + \frac{\alpha_p}{1 - \rho_p},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  ayant les valeurs qui résultent du système d'équations (3). On tombe ainsi sur une fonction symétrique des racines de l'équation génératrice d'une forme

tellement compliquée qu'il est à peu près inutile de chercher à en calculer la valeur au moyen des coefficients de cette équation.

3. Nous allons faire voir maintenant comment notre formule (1) donne directement cette expression.

Rappelons d'abord le résultat suivant démontré dans notre Mémoire de 1884 (n° 10).

En représentant par  $(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n)}$  ce que devient le développement de  $(\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_p)^n$  lorsqu'on y remplace tous les coefficients par l'unité, nous avons fait voir que

$$u_n = (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n-p+1)}.$$

Partant de là et nous appuyant sur les formules (3) et (4) de notre Mémoire, qui donnent

$$\begin{aligned} & (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(0)} + (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(1)} + \dots + (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n-p+1)} \\ & = (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n-p+1)}, \end{aligned}$$

et, en posant  $\psi(x) = (x-1)\varphi(x)$ ,

$$\begin{aligned} & (\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p)^{(n-p+1)} \\ & = \frac{\rho_1^{n+1}}{\psi'(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{n+1}}{\psi'(\rho_2)} + \dots + \frac{\rho_p^{n+1}}{\psi'(\rho_p)} + \frac{1}{\psi'(1)}, \end{aligned}$$

nous avons obtenu la formule

$$\sum_{i=p-1}^{i=n} u_n = \frac{1}{\psi'(1)} + \sum_{h=1}^{h=p} \frac{\rho_h^{n+1}}{\psi'(\rho_h)};$$

d'où, à la limite, en supposant les modules de  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  inférieurs à 1,

$$(4) \quad s = \frac{1}{\psi'(1)} = \frac{1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p)}.$$

