

V. JAMET

**Recherche de quelques courbes planes, par
l'intermédiaire de leurs développées**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 496-502

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_496_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**RECHERCHE DE QUELQUES COURBES PLANES,
PAR L'INTERMÉDIAIRE DE LEURS DÉVELOPPÉES;**

PAR M. V. JAMET.

1. THÉORÈME. — *Si le rayon de courbure d'une courbe (C) est, en chaque point, moyenne harmonique entre les distances du pied de la normale aux points où celle-ci rencontre une courbe algébrique fixe (S), la développée de (C) jouit de la propriété suivante, qui est caractéristique : son arc, augmenté d'une longueur constante et élevé à une puissance égale au degré de (S), est une fonction entière et rationnelle des coordonnées de son extrémité mobile.*

En effet, soit $f(x, y) = 0$ l'équation de la courbe (S); on peut toujours supposer que la lettre f désigne une fonction entière et rationnelle de x, y ; soit m son degré. Soient, aussi, x, y les coordonnées d'un point de la développée de (C), X, Y les coordonnées du point correspondant situé sur (C), ρ le rayon de courbure de (C) en ce point, s l'arc de la développée, compté sur cette courbe à partir d'un point fixe jusqu'au point (x, y) . On connaît les relations

$$(1) \quad X = x + \rho \frac{dx}{ds}, \quad Y = y + \rho \frac{dy}{ds},$$

$$(2) \quad \rho = a - s,$$

où a désigne une constante. Pour trouver les distances du point (x, y) , aux points où la normale rencontre la courbe (S), il suffit de remplacer, dans son équation,

x, y par les seconds membres des équations (1). On trouve ainsi l'équation

$$f(x, y) + \rho \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \frac{\rho^2}{1.2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \right)^2 + \dots = 0,$$

de degré m par rapport à ρ . Soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ ses racines.

On a, par hypothèse,

$$\frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_m};$$

donc

$$\frac{m}{a-s} = \dots = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds}}{f(x, y)}$$

ou bien

$$(3) \quad -\frac{m ds}{s-a} + \frac{df}{f(x, y)} = 0.$$

On trouve, en intégrant,

$$\log f(x, y) - m \log(s-a) = \log C$$

ou

$$(4) \quad f(x, y) = C(s-a)^m,$$

C désignant une constante.

Cette équation démontre la proposition directe : la réciproque est vraie, parce que l'équation (3) peut être regardée comme une conséquence de l'équation (4).

2. Celle-ci permet également de trouver une équation différentielle du premier ordre, contenant une constante arbitraire et devant être vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de la développée : il suffit d'éli-

miner $s - a$ entre l'équation (4) et l'équation

$$df = m C(s - a)^{m-1} ds,$$

qu'on en déduit par différentiation, puis, dans l'équation obtenue, de remplacer ds par $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Mais on conçoit aussi la possibilité de vérifier l'équation (4) en y remplaçant x, y, s par des fonctions de deux paramètres : il faudra alors établir, entre ces deux paramètres, une relation équivalente à celle-ci

$$ds = \sqrt{ax^2 + dy^2}.$$

Comme application de ce qui précède, nous traiterons le cas où la courbe (S) est une conique, laissant au lecteur le soin de ramener aux éléments du Calcul intégral les cas particuliers où cette conique dégénère en un cercle, ou en une couple de droites. Nous rappellerons en outre que le cas du cercle a été traité incidemment (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 178, 353; 1888) par M. Cesaro, qui vient également de publier, dans le *Journal Mathesis* (octobre 1889), une étude directe de la courbe (C) dans le cas où la conique se compose de deux droites parallèles.

3. Si la conique donnée possède un centre à distance finie, nous pourrons écrire l'équation (4) comme il suit

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} - \frac{(s - a)^2}{a_3} = 1,$$

a_3 désignant une constante arbitraire. Cette équation sera vérifiée si l'on y remplace $x, y, s - a$ par les fonctions de λ, μ , qui résultent des formules suivantes

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a_1(a_1 + \lambda)(a_1 + \mu)}{(a_1 - a_1)(a_1 - a_3)}, & y^2 &= \frac{a_2(a_2 + \lambda)(a_2 + \mu)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}, \\ & & -(s - a)^2 &= \frac{a_3(a_3 + \lambda)(a_3 + \mu)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}. \end{aligned}$$

(Celles-ci résultent de la théorie des coordonnées elliptiques, telle que Jacobi l'a exposée dans ses *Leçons de Dynamique*.)

La substitution de ces expressions dans l'équation

$$dx^2 + dy^2 - ds^2 = 0$$

conduit, après la suppression du facteur $\lambda - \mu$, à l'équation différentielle suivante

$$\frac{\lambda d\lambda^2}{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda)} - \frac{\mu d\mu^2}{(a_1 + \mu)(a_2 + \mu)(a_3 + \mu)} = 0$$

ou

$$(5) \sqrt{\frac{\lambda}{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda)}} d\lambda \pm \sqrt{\frac{\mu}{(a_1 + \mu)(a_2 + \mu)(a_3 + \mu)}} d\mu = 0$$

et l'on est ramené à effectuer deux quadratures. Les deux intégrales que l'on trouve ainsi se transforment en des fonctions qu'on désigne, d'après Jacobi, par la notation $\Pi(x, a)$. En effet, posons

$$\frac{\lambda}{a_1 + \lambda} = h \operatorname{sn}^2 \varphi, \quad \frac{\mu}{a_1 + \mu} = h \operatorname{sn}^2 \psi.$$

Nous trouvons, successivement,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a_1 h \operatorname{sn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi}, \\ d\lambda &= 2a_1 h \frac{\operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi d\varphi}{(1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi)^2}, \\ a_2 + \lambda &= \frac{a_2 + h(a_1 - a_2) \operatorname{sn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi}, \\ a_3 + \lambda &= \frac{a_3 + h(a_1 - a_3) \operatorname{sn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi}; \end{aligned}$$

puis, si nous faisons

$$h = \frac{a_2}{a_2 - a_1}, \quad k^2 = \frac{a_3 - a_1}{a_3} \frac{a_2}{a_2 - a_1},$$

nous trouverons encore

$$\alpha_2 + \lambda = \frac{\alpha_2 \operatorname{cn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi}, \quad \alpha_3 + \lambda = \frac{\alpha_3 \operatorname{dn}^2 \varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi},$$

et nous en concluons que l'intégrale

$$\int_0^\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{(\alpha_1 + \lambda)(\alpha_2 + \lambda)(\alpha_3 + \lambda)}} d\lambda$$

ne diffère que par un facteur constant de l'intégrale suivante :

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{sn}^2 \varphi d\varphi}{1 - h \operatorname{sn}^2 \varphi}.$$

Soit encore

$$h = k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \quad \text{ou} \quad \operatorname{sn}^2 \alpha = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_1}.$$

L'équation différentielle (5), transformée comme il vient d'être dit, sera équivalente à celle-ci

$$\int_0^\varphi \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn}^2 \varphi d\varphi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \varphi} \pm \int_0^\psi \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn}^2 \psi d\psi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \psi} = C,$$

C désignant une constante arbitraire; ou encore

$$\Pi(\varphi, \alpha) \pm \Pi(\psi, \alpha) = C.$$

4. Si la conique donnée est une parabole, l'équation (4) prend la forme

$$2x - \frac{y^2}{p} - \frac{(s - \alpha)^2}{q} = 0.$$

où q désigne une constante arbitraire. Cette relation est celle qui existe entre les limites de x , y , s , si l'on suppose que dans l'équation

$$\frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{y^2}{\alpha_2} - \frac{(s - \alpha)^2}{\alpha_3} = 1,$$

lorsque, après avoir remplacé x par $x - \sqrt{a_1}$, on suppose que a_1, a_2, a_3 deviennent infinis, avec les conditions suivantes

$$(6) \quad \lim \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} = p, \quad \lim \frac{a_3}{\sqrt{a_1}} = q.$$

Si l'on suppose, en outre,

$$(7) \quad \lim \frac{\lambda}{\sqrt{a_1}} = u, \quad \lim \frac{\mu}{\sqrt{a_1}} = v,$$

les formules qui font connaître $x, y, s - a$ en fonction de λ, μ se transforment comme il suit

$$\begin{aligned} -2x &= u + v + p + q, \\ y^2 &= \frac{p(p+u)(p+v)}{q-p}, \\ -(s-a)^2 &= \frac{q(q+u)(q+v)}{q-p}. \end{aligned}$$

Si, dans l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

on tient compte de ces relations, ou, si l'on fait, dans l'équation (5) les hypothèses (6), (7), on trouve l'équation différentielle suivante

$$\frac{v \, dv^2}{(p+v)(q+v)} - \frac{u \, du^2}{(p+u)(q+u)} = 0$$

ou

$$\sqrt{\frac{v}{(p+v)(q+v)}} \, dv \pm \sqrt{\frac{u}{(p+u)(q+u)}} \, du = 0,$$

dont l'intégration se ramène au calcul des fonctions désignées habituellement par la notation $Z(x)$. Il suffit, en effet, de poser

$$u = -p \operatorname{sn}^2 \varphi, \quad v = -p \operatorname{sn}^2 \psi,$$

(502)

avec la condition

$$k^2 = \frac{q}{p}.$$

On trouve ainsi l'équation différentielle

$$\operatorname{sn}^2 \varphi \, d\varphi \pm \operatorname{sn}^2 \psi \, d\psi = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\mathbf{Z}(\varphi) \pm \mathbf{Z}(\psi) = C,$$

C désignant une constante arbitraire.