NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 481-495

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__481_0>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (¹);

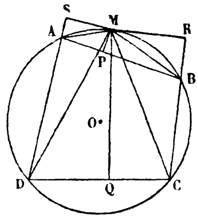
PAR M. L. MALEYX.

Théorème de Pappus.

V. *Si d'un point pris sur la circonférence d'un cercle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés est égal à celui des perpendiculaires abaissées sur les deux autres.*

Soient O la circonférence considérée (*fig.* 22), ABCD le quadrilatère inscrit, MP, MQ les perpendiculaires

Fig. 22.



abaissées du point M sur les deux côtés opposés AB, CD; MR, MS les perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres. Joignons le point M aux points A, B, C, D, par des lignes droites : on a, d'après un théorème connu, et désignant par R le rayon du cercle O,

$$MA \times MB = MP \times 2R, \qquad MD \times MC = MQ \times 2R;$$

(¹) *Voir* même Tome, p. 424.

d'où, multipliant ces égalités membre à membre,

$$MA \times MB \times MC \times MD = 4R^2 \times MP \times MQ;$$

on trouve encore par l'application du même théorème

$$MA \times MB \times MC \times MD = 4R^2 \times MR \times MS;$$

de là, par comparaison,

$$MP \times MQ = MR \times MS.$$

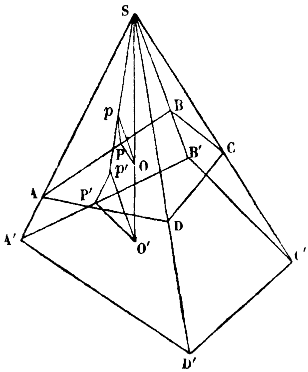
Ce théorème s'applique aux sections planes d'un cône à base circulaire avec une légère modification d'énoncé :

Si d'un point pris sur une section conique on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées de ce point sur deux côtés opposés du quadrilatère est au produit des perpendiculaires abaissées sur les deux autres dans un rapport constant.

Si l'on unit les sommets du quadrilatère inscrit dans la section conique au sommet du cône, auquel elle appartient, par des lignes droites, génératrices du cône, ces droites rencontrent la circonférence directrice du cône en quatre points, sommets d'un quadrilatère inscrit dans cette circonférence et dont le quadrilatère inscrit dans la conique peut être considéré comme la perspective.

Soient S le sommet du cône, ABCD le quadrilatère inscrit dans la conique, et perspective du quadrilatère $A'B'C'D'$ inscrit dans la directrice circulaire (*fig.* 23); soit O un point du plan ABCD, traçons la droite SO et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en O' avec le plan $A'B'C'D'$; puis des points O et O' abaissons les perpendiculaires Op, $O'p'$ sur le plan SAB, et pP, $p'P'$ respectivement perpendiculaires sur AB, $A'B'$; enfin joignons par des lignes droites OP, $O'P'$. OP et $O'P'$ sont respectivement perpendiculaires à AB et A′B′, d'après le théorème des trois perpendiculaires; de plus, dans les triangles rectangles OPp, $O'P'p'$, les angles en P et P′

Fig. 23.



sont fixes comme angles rectilignes des dièdres aigus formés par le plan SAB avec les plans ABCD, A′B′C′D′; il en résulte que dans ces triangles les rapports des hypoténuses OP, O′P′, aux côtés Op, $O'p'$, sont des nombres fixes, et que le rapport $\frac{OP}{O'P'}$ est égal au produit du rapport $\frac{Op}{O'p'}$ par un nombre constant, soit α_1, d'où

$$\frac{OP}{O'P'} = \alpha_1 \frac{Op}{O'p'}.$$

Comme, du reste, les triangles $SO'p'$, SOp sont semblables, puisque Op, $O'p'$, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles, on a $\frac{Op}{O'p'} = \frac{SO}{SO'}$ et, en conséquence,

$$\frac{OP}{O'P'} = \alpha_1 \frac{SO}{SO'}. \tag{1}$$

On trouverait de même, désignant par Q, R, S les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les droites DC, BC, AD, et de même par Q′, R′, S′ ceux des perpendiculaires abaissées du point O′ sur les droites D′C′, B′C′, A′D′, respectivement :

$$(2)\qquad \frac{OQ}{O'Q'} = \alpha_2 \frac{SO}{SO'},$$

$$(3)\qquad \frac{OR}{O'R'} = \alpha_3 \frac{SO}{SO'},$$

$$(4)\qquad \frac{OS}{O'S'} = \alpha_4 \frac{SO}{SO'},$$

α_2, α_3, α_4 étant des coefficients constants.

On déduit des égalités (1), (2), (3), (4), par une transformation évidente,

$$\frac{OP \times OQ}{OR \times OS} = \frac{O'P' \times O'Q'}{O'R' \times O'S'} \times \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4}.$$

Si nous supposons alors le point O placé en un point de la section conique, le point O′ sera placé sur la circonférence directrice; dès lors on aura, d'après le théorème précédent,

$$\frac{O'P' \times O'Q'}{O'R' \times O'S'} = 1,$$

d'où

$$\frac{OP \times OQ}{OR \times OS} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4},$$

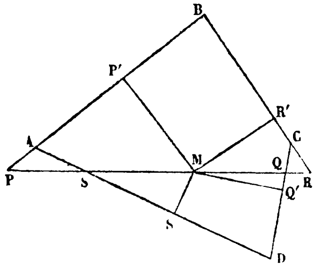
qui établit le théorème énoncé.

Théorème et application à la construction des points communs d'une droite quelconque et d'une conique dont on donne cinq points.

VI. *Si l'on considère une conique circonscrite à un quadrilatère et que par un quelconque de ses points on mène une parallèle à une direction fixe, le* **rapport involutif** *de ce point, par rapport aux deux couples* *de points de rencontre de la sécante avec les deux systèmes de côtés opposés du quadrilatère, est un nombre constant.*

Soient ABCD le quadrilatère inscrit, PS la sécante parallèle à une direction fixe menée par le point M va-

Fig. 24.



riable sur la conique circonscrite, et coupant les couples de côtés opposés du quadrilatère aux points P et Q, R et S (*fig.* 24). Abaissons du point M les perpendiculaires MP′, MQ′, MR′, MS′, sur les côtés du quadrilatère; les triangles rectangles MP′P, MQ′Q, MR′R, MS′S, restent semblables à eux-mêmes dans le déplacement de la sécante : il en résulte qu'on a les égalités

$$\mathrm{MP} = \mathrm{MP}'.\beta_1, \qquad \mathrm{MQ} = \mathrm{MQ}'.\beta_2,$$
$$\mathrm{MR} = \mathrm{MR}'.\beta_3, \qquad \mathrm{MS} = \mathrm{MS}'.\beta_4;$$

β_1, β_2, β_3, β_4 étant des nombres fixes; et, en conséquence, on a

$$\frac{\mathrm{MP}\times\mathrm{MQ}}{\mathrm{MR}\times\mathrm{MS}} = \frac{\mathrm{MP}'\times\mathrm{MQ}'}{\mathrm{MR}'\times\mathrm{MS}'} \times \frac{\beta_1.\beta_2}{\beta_3.\beta_4}.$$

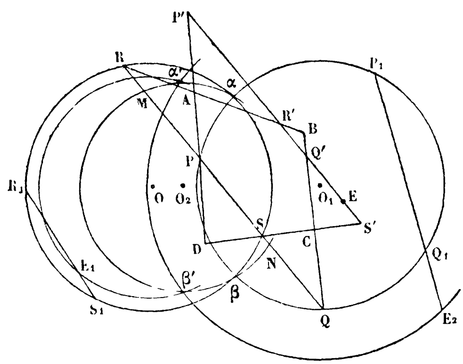
Or, d'après le théorème de **Pappus**, établi au numéro précédent, le second membre est fixe.

Le second membre de l'égalité précédente est numériquement fixe : on pourra définir son signe, d'après ceux des segments MP, MQ, MR, MS, pour une position particulière du point M; ce signe, une fois déterminé, restera le même pour tous les points de la courbe, car il ne peut changer que tout autant que l'un des segments change de signe, et cela ne peut arriver que tout autant que le point M, dans son déplacement continu, vient passer par un des sommets du quadrilatère inscrit; dans ce cas, deux des segments changent à la fois de signe, et le rapport involutif conserve le sien.

On déduit de ce théorème une construction, **relativement simple**, des points communs d'une conique, dont on donne cinq points, et d'une droite quelconque.

Soient A, B, C, D, E cinq points d'une conique, RQ une droite donnée (*fig.* 25); construisons le quadrilatère

Fig. 25.



inscrit ABCD, et menons par le point E une parallèle P'S' à RQ. D'après le théorème précédent et si M, N sont les points communs de la conique et de la droite RQ, les trois rapports involutifs

$$\frac{ER' \times ES'}{EP' \times EQ'}, \quad \frac{NR \times NS}{NP \times NQ}, \quad \frac{MR \times MS}{MP \times MQ}$$

sont égaux; il en résulte que, si l'on construit deux cercles, soit O passant par R et S, et O_1 passant par P et Q, les points M et N appartiennent au cercle lieu des points dont les puissances par rapport aux cercles O et O_1 sont dans le rapport $\frac{ER' \times ES'}{EP' \times EQ'}$, n° I, Chap. II.

Ce dernier cercle, dont les points communs avec la droite RQ sont les points cherchés, peut être construit; en effet, on sait d'abord qu'il a même axe radical avec les deux cercles O et O_1 et qu'en conséquence il passe par leurs points communs α et β; en second lieu, on peut en déterminer facilement un et même deux autres points. Si nous inscrivons dans les cercles O et O_1 deux cordes R_1S_1, P_1Q_1 respectivement égales à $R'S'$, $P'Q'$, puis que nous prenions sur elles les segments R_1E_1, P_1E_2, respectivement égaux à $R'E$, $P'E$, le cercle décrit de O comme centre avec OE_1 pour rayon sera le lieu des points dont les puissances, par rapport au cercle O, sont égales à $ER' \times ES'$, et celui qui est décrit de O_1 comme centre avec O_1E_2 pour rayon sera le lieu des points dont les puissances par rapport au cercle O_1 sont égales à $EP' \times EQ'$; les points communs α', β' de ces deux cercles appartiennent au cercle cherché, dont on connaît ainsi quatre points, ce qui permet de le décrire.

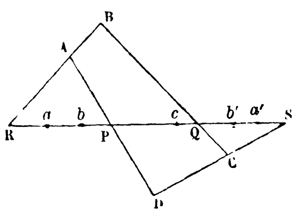
Remarque I. — On peut ainsi remplacer les deux points communs, réels ou imaginaires, de la conique et de la droite par ceux de la droite et d'un cercle facile à construire.

Remarque II. — En dehors de ses autres usages, cette construction peut être utilisée, **en Géométrie descriptive**, pour construire les tangentes au point double effectif de deux quadriques qui ont un plan tangent commun et même point de contact.

VII. Théorème. — *Si trois coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, et que par un point variable de l'une d'elles on mène une sécante rectiligne parallèle à une direction fixe, le rapport involutif de ce point par rapport aux deux couples de points de rencontre de la sécante avec les deux autres coniques est un nombre constant.*

Soient ABCD le quadrilatère inscrit dans les trois coniques (*fig.* 26), PQ la sécante parallèle à la direc-

Fig. 26.



tion donnée menée par le point c d'une de ces courbes. Soient P et Q, R et S les points de rencontre de la sécante avec les couples de côtés opposés du quadrilatère, a et a', b et b' les couples de points de rencontre avec les deux autres courbes.

D'après le théorème précédent, on a, θ, θ_1, θ_2 étant des nombres fixes,

$$\frac{a\mathrm{P}\times a\mathrm{Q}}{a\mathrm{R}\times a\mathrm{S}}=\theta=\frac{a'\mathrm{P}\times a'\mathrm{Q}}{a'\mathrm{R}\times a'\mathrm{S}}.$$

Ramenons ces deux égalités à la forme entière; en prenant le point c pour origine des distances, nous aurons

$$(ca-c\mathrm{P})(ca+c\mathrm{Q})=\theta(c\mathrm{R}-ca)(ca+c\mathrm{S}),$$
$$(ca'+c\mathrm{P})(ca'-c\mathrm{Q})=\theta(ca'+c\mathrm{R})(c\mathrm{S}-ca').$$

Ordonnons ces deux égalités, lues aux premiers membres, par rapport aux puissances décroissantes de

ca, ca', respectivement, et remarquant que

$$cP \times cQ = cR \times cS \times \theta_2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\overline{ca}^2(1+\theta) + ca\,[cQ - cP + \theta(cS - cR)] \\ - cR \times cS(\theta_2 + \theta) = 0,\\ \overline{ca'}^2(1+\theta) - ca'[cQ - cP + \theta(cS - cR)] \\ - cR \times cS(\theta_2 + \theta) = 0.\end{aligned}$$

Multipliant la première par ca', la seconde par ca et ajoutant, on trouve

$$(ca + ca')[ca \times ca'(1+\theta) - cR \times cS(\theta_2 + \theta)] = 0,$$

égalité qui exige

$$(1) \qquad ca \times ca'(1+\theta) = cR \times cS(\theta_2 + \theta).$$

Par un calcul analogue et partant des égalités

$$\frac{bP \times bQ}{bR \times bS} = \theta_1 = \frac{b'P \times b'Q}{b'R \times b'S},$$

on trouve

$$(2) \qquad cb \times cb'(1+\theta_1) = cR \times cS(\theta_2 + \theta_1);$$

d'où, divisant membre à membre les égalités (1) et (2),

$$\frac{ca \times ca'}{cb \times cb'} = \frac{(1+\theta_1)(\theta_2+\theta)}{(1+\theta)(\theta_2+\theta_1)};$$

le second membre étant constant, le théorème est démontré.

Théorème de Desargues et sa généralisation.

VIII. Le théorème de Desargues consiste en ce qui suit :

Une sécante rectiligne quelconque détermine par ses rencontres avec une conique et les systèmes de côtés *opposés d'un quadrilatère inscrit six points en involution.*

La démonstration de ce théorème se déduit immédiatement du théorème qui précède de deux rangs; en effet, puisque, conformément à ce théorème, le rapport involutif du point M par rapport aux couples de points P et Q, R et S, est le même pour tous les points de la courbe, quand la sécante se déplace parallèlement à une direction fixe, il aura la même valeur pour le second point commun M′ de la sécante PR avec la courbe; en conséquence, les deux points M, M′, ayant même rapport involutif par rapport aux deux couples de points P et Q, R et S, forment avec eux un système en involution (n° II, Chap. II, fin).

La généralisation du théorème de Desargues par Sturm consiste en ce qui suit :

Une sécante rectiligne quelconque détermine par ses rencontres avec trois coniques circonscrites au même quadrilatère un système de six points en involution.

Cette généralisation se déduit du théorème du numéro précédent par le raisonnement au moyen duquel nous avons déduit le théorème de Desargues de celui qui précède de deux rangs; nous ne nous y arrêterons pas.

Conséquence du théorème de Desargues. — *Si trois côtés d'un quadrilatère inscrit dans une conique tournent autour de trois points fixes pris sur une ligne droite, la quatrième tourne autour d'un point fixe de la même droite.*

En effet, le point où le quatrième côté rencontre la droite est le conjugué du point de rencontre du côté opposé avec la même droite, dans l'involution déterminée par les deux autres points et les deux points de rencontre de la conique avec la droite; et ceci a lieu alors même que les points communs de la conique et de la droite seraient imaginaires, puisqu'on peut toujours remplacer les points communs d'une conique et d'une droite par ceux d'un cercle et de la même droite (nº VI, Chap. II).

Note sur le nº VII du présent Chapitre. — La démonstration analytique du théorème du nº VII, dont celui du nº VI n'est qu'un cas particulier, est presque immédiate; on sait en effet que, si les équations de deux coniques, rapportées au même système d'axes rectilignes, sont $F(x,y)=0$, $F_1(x,y)=0$, l'équation générale des coniques passant par les points communs des deux premières est $F(x,y)+\lambda F_1(x,y)=0$, λ étant un coefficient constant pour chacune de ces courbes.

On sait encore que les distances du point du plan dont les coordonnées sont x_0, y_0, aux points où une droite passant par (x_0, y_0) et dont le point directeur ayant pour coordonnées a, b rencontre la courbe $F(x,y)=0$, sont les racines de l'équation

$$F(x_0,y_0)+\rho(aF'_{x_0}+bF'_{y_0})+\rho^2\varphi(a,b)=0,$$

$\varphi(x,y)$ étant l'ensemble des termes du second degré de $F(x,y)$.

Il en résulte que le produit de ces distances est égal à $\dfrac{F(x_0,y_0)}{\varphi(a,b)}$; de même le produit des distances du point (x_0, y_0) aux points où la même droite rencontre la courbe $F_1(x,y)=0$ est égal à $\dfrac{F_1(x_0,y_0)}{\varphi_1(a,b)}$.

Or l'équation $F(x_0,y_0)+\lambda F_1(x_0,y_0)=0$, qui est vérifiée par les coordonnées de tout point, (x_0, y_0), de la troisième courbe, peut se mettre sous la forme

$$\frac{\dfrac{F(x_0,y_0)}{\varphi(a,b)}}{\dfrac{F_1(x_0,y_0)}{\varphi_1(a,b)}}=-\lambda\,\frac{\varphi_1(a,b)}{\varphi(a,b)};$$

et sous cette forme elle exprime que le rapport involutif du point (x_0, y_0), par rapport aux couples de points où la droite, définie de direction par le point (a, b), et passant par le point (x_0, y_0), rencontre les deux autres courbes, est constant.

Cette démonstration est sans doute très simple; mais je dois à la vérité de dire que, quoique j'aie eu l'occasion de retourner et de voir retourner l'équation $F(x,y)+\lambda F_1(x,y)=0$ de bien des manières, il ne m'est jamais venu à l'esprit de l'interpréter ainsi; et que, si je

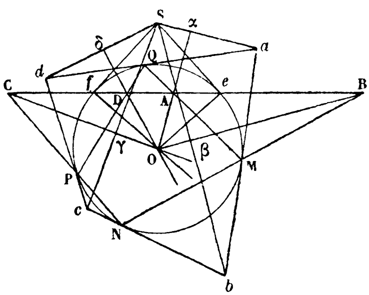
n'avais été conduit par les considérations géométriques de la présente étude, je ne l'aurais probablement jamais connue.

Théorème corrélatif de celui de Desargues.

IX. *Si l'on considère une circonférence de cercle et un quadrilatère circonscrit, qu'on joigne un point de son plan aux deux couples de sommets opposés du quadrilatère, que du même point on mène les deux tangentes au cercle, ces trois couples de deux droites font partie d'un faisceau en involution.*

Soient *abcd* le quadrilatère circonscrit à la circonférence O (*fig.* 27), S le point de son plan, S*e*, S*f* les

Fig. 27.



deux tangentes issues de ce point; il s'agit de démontrer que les trois couples de droites S*a* et S*c*, S*e* et S*f*, S*b* et S*d* forment un faisceau en involution.

Construisons le quadrilatère inscrit dont les sommets M, N, P, Q sont les points de contact des côtés du quadrilatère circonscrit et prolongeons ses côtés opposés jusqu'à leurs points de rencontre avec la polaire *ef* du point S, par rapport au cercle O, en A, B, C, D.

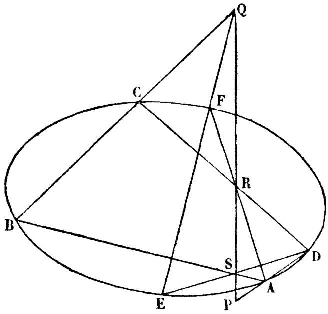
L'un de ces points, A par exemple, étant le point commun des polaires des points S et *a* par rapport au cercle O, est le pôle de la droite Sa : dès lors $OA\alpha$ est perpendiculaire sur Sa; on voit de même que Oe, $O\beta B$, $O\gamma C$, Of, $OD\delta$ sont respectivement perpendiculaires sur Se, Sb, Sc, Sf, Sd; il en résulte que le faisceau des droites admettant pour rayons associés Sa et Sc, Se et Sf, Sb et Sd, est superposable sur celui dont les rayons correspondants OA et OC, Oe et Of, OB et OD, leur sont respectivement perpendiculaires; et, comme ces derniers forment un faisceau en involution, d'après le théorème de Desargues, il en est de même des premiers, ce qu'on voulait démontrer.

Le théorème qu'on vient de démontrer pour le cercle s'applique également à l'une quelconque des trois sections coniques; en effet, une quelconque des trois sections coniques est, par définition, la perspective d'un cercle en prenant le sommet du cône pour point de vue; un quadrilatère circonscrit à la conique est celle d'un quadrilatère circonscrit au cercle; dès lors, si l'on unit un point du plan d'une conique aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à cette conique, et que du même plan on lui mène des tangentes, ces six droites seront perspectives de six droites du plan du cercle qui font partie d'un faisceau en involution, d'après le théorème précédent; il résulte de ce qui a été dit à la fin du nº IV, Ch. II, que ces six droites font aussi partie d'un faisceau en involution.

X. Théorème de Pascal. — *Les points de rencontre des trois couples de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont situés en ligne droite.*

Soit l'hexagone ABCDEF inscrit dans une conique (*fig.* 28) : construisons la diagonale AD, unissant deux sommets opposés, et prenons son point commun P avec la droite QR, qui joint les points Q et R où se coupent deux systèmes de deux côtés opposés, BC et FE, DC et AF. Trois côtés AD, DC, CB du quadrilatère inscrit ADCB passent par les trois points P, Q, R; il en est de même des trois côtés AD, AF, FE du quadrilatère in-

Fig. 28.



scrit AFED; donc les quatrièmes côtés de ces quadrilatères, AB et DE, vont se couper au même point S de la droite QR, ce qu'on voulait démontrer (conséquence du théorème de Desargues, n° VIII, Chap. II).

Ce théorème continue à avoir lieu si un ou plusieurs côtés de l'hexagone deviennent nuls, en remplaçant chaque côté devenant nul par la tangente qui en est la limite [1].

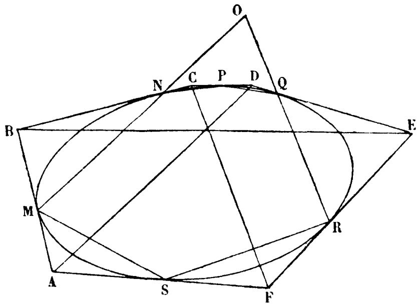
XI. Théorème de Brianchon. — *Les diagonales unissant deux sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique se coupent en un même point.*

Soit ABCDEF un hexagone circonscrit à une conique

[1] Si l'on admet le théorème de Pascal pour le cercle, et il y en a plusieurs démonstrations élémentaires que nous n'avons pas à rapporter, on peut en déduire que ce théorème a aussi lieu pour une conique quelconque, considerée comme perspective d'un cercle, ce qui constitue une démonstration simple du même théorème.

(*fig.* 29), M, N, P, Q, R, S les points de contact des côtés qui sont les sommets d'un hexagone inscrit; considérons la diagonale BE qui unit deux sommets opposés de l'hexagone circonscrit. La droite MN passant par les

Fig. 29.



pôles M et N des tangentes AB, BC, par rapport à la conique, a pour pôle leur point commun B (n° XIX, Chap. I); de même la droite QR a pour pôle le point E où se coupent les tangentes DE, EF; la diagonale BE passant par les pôles B et E des cordes MN et QR, le point O où se coupent ces cordes est le pôle de la droite BE.

Or ce point O est un des points de la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit : dès lors la droite BE passe par le pôle de la droite de Pascal; il en est de même des deux autres diagonales AD, CF : donc ces trois diagonales se coupent en un même point.

Ce théorème continue encore à s'appliquer si deux côtés consécutifs viennent se placer dans le prolongement l'un de l'autre, en considérant le point de contact comme le sommet commun à ces deux côtés; il s'applique encore dans ces conditions s'il en est ainsi pour plusieurs couples de deux côtés consécutifs. (*A suivre.*)