

STIELTJES

Note sur l'intégrale $\int_0^\infty e^{-u^2} du$

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 479-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_479_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR L'INTÉGRALE $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$;

PAR M. STIELTJES.

M. Méray a montré récemment (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1889) qu'on peut obtenir la valeur de cette intégrale à l'aide de la formule de Wallis. La déduction suivante se fonde sur la même idée, mais on la trouvera peut-être un peu plus simple.

Soit

$$I_n = \int_0^{\infty} u^n e^{-u^2} du;$$

une intégration par parties donne

$$I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2};$$

d'où l'on conclut,

$$I_{2k} = \frac{1.3.5\dots(2k-1)}{2^k} I_0,$$

$$I_{2k+1} = \frac{1.2.3\dots k}{2}.$$

L'expression

$$I_{n+1} + 2x I_n + x^2 I_{n-1} = \int_0^\infty u^{n-1}(u+x)^2 e^{-u^2} du$$

est évidemment *positive* pour toute valeur réelle de x ,
donc

$$I_n^2 < I_{n-1} I_{n+1}$$

ou, à cause de $I_{n+1} = \frac{n}{2} I_{n-1}$,

$$I_n^2 < \frac{n}{2} I_{n-1}^2.$$

On a, par conséquent,

$$I_{2k}^2 > \frac{2}{2k+1} I_{2k+1}^2, \quad I_{2k}^2 < I_{2k-1} I_{2k+1},$$

c'est-à-dire

$$I_{2k}^2 > \frac{(1.2.3\dots k)^2}{4k+2}, \quad I_{2k}^2 < \frac{(1.2.3\dots k)^2}{4k},$$

en sorte qu'on peut poser

$$I_{2k}^2 = \frac{(1.2.3\dots k)^2}{4k+2} (1+\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2k},$$

ou, en exprimant I_{2k} par I_0 ,

$$2I_0^2 = \frac{[2.4.6\dots(2k)]^2}{[1.3.5\dots(2k-1)]^2(2k+1)} (1+\varepsilon).$$

En faisant croître indéfiniment l'entier k , il vient,
d'après la formule de Wallis,

$$2I_0^2 = \frac{\pi}{2}, \quad I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$