CH. BIEHLER

Sur les équations binômes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 472-476

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__472_1>

SUR LES ÉQUATIONS BINOMES;

PAR M. CH. BIEHLER.

On sait que la résolution de l'équation binôme $x^N + 1 = 0$, où N est un nombre entier quelconque, se ramène à la résolution d'équations de la forme

$$x^{2m+1} - 1 = 0$$

et à celle de l'équation $x^{2^n} - 1 = 0$ dont les racines peuvent être exprimées au moyen de radicaux du second degré.

L'équation $x^{2m+1} - 1 = 0$ admet la racine $x = 1$.

En divisant le polynôme $x^{2m+1} - 1$ par $x - 1$ et en égalant à zéro le quotient, on obtient l'équation réciproque

$$x^{2m} + x^{2m-1} + \ldots + x + 1 = 0$$

ou

$$x^m + \frac{1}{x^m} + x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} + \ldots + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

En posant

$$x + \frac{1}{x} = y$$

et en désignant d'une manière générale par V_μ la fonction $x^\mu + \frac{1}{x^\mu}$ évaluée au moyen de y, on sait que V_μ est un polynôme de degré μ en y, et l'équation précédente, après cette transformation, devient

$$V_m + V_{m-1} + \ldots + V_1 + 1 = 0.$$

Soit U_m son premier membre,

$$U_m = V_m + V_{m-1} + \ldots + V_1 + 1,$$

nous allons démontrer algébriquement que l'équation $U_m = 0$ a toutes ses racines réelles et comprises entre -2 et $+2$.

Pour cela, nous nous appuierons sur une propriété bien connue des fonctions V, à savoir : trois fonctions consécutives quelconques V_μ, $V_{\mu-1}$, $V_{\mu-2}$ sont liées par la relation

$$V_\mu - y\,V_{\mu-1} + V_{\mu-2} = 0;$$

cette relation aura lieu encore pour les trois fonctions V_2, V_1, V_0 à la condition de prendre pour V_0 la valeur $V_0 = 2$.

Il est aisé de démontrer que trois fonctions consécutives U_μ, $U_{\mu-1}$, $U_{\mu-2}$ sont liées par la même relation

$$U_\mu - y\,U_{\mu-1} + U_{\mu-2} = 0,$$

U_μ désignant le polynôme

$$U_\mu = V_\mu + V_{\mu-1} + \ldots + V_1 + 1.$$

En effet, on a les trois égalités

$$\begin{aligned} U_\mu &= V_\mu + V_{\mu-1} + \ldots + V_2 + V_1 + 1, \\ U_{\mu-1} &= V_{\mu-1} + V_{\mu-2} + \ldots + V_1 + 1, \\ U_{\mu-2} &= V_{\mu-2} + V_{\mu-3} + \ldots + 1. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre ces égalités, après avoir multiplié préalablement la seconde par $-y$, il viendra

$$\begin{aligned} U_\mu - y\,U_{\mu-1} + U_{\mu-2} = {} & V_\mu - y\,V_{\mu-1} + V_{\mu-2} \\ & + V_{\mu-1} - y\,V_{\mu-2} + V_{\mu-3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + V_2 - y\,V_1 + 1 \\ & + V_1 - y + 1, \end{aligned}$$

tous les polynômes qui figurent dans chacune des lignes du second membre, jusqu'à l'avant-dernière exclusivement, sont nuls ; de plus $V_1 - y = 0$; la dernière se réduit donc à 1. En ajoutant cette unité à l'avant-dernière, on obtient

$$V_2 - y\,V_1 + 2,$$

qui est nul ; par suite, on a identiquement

$$U_\mu - y\,U_{\mu-1} + U_{\mu-2} = 0.$$

Cette relation subsiste depuis $\mu = m$ jusqu'à $\mu = 2$;

elle subsiste aussi pour $\mu = 2$, en vertu du calcul précédent, à la condition de prendre $U_0 = 1$.

On a donc entre U_m, U_{m-1}, ..., U_1, U_0 la suite des relations

$$\begin{aligned}
&U_m - y\,U_{m-1} + U_{m-2} = 0,\\
&U_{m-1} - y\,U_{m-2} + U_{m-3} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&U_2 - y\,U_1 + U_0 = 0.
\end{aligned}$$

Ces relations nous montrent que les fonctions

$$U_m,\quad U_{m-1},\quad \ldots,\quad U_0$$

jouissent des propriétés requises pour l'application du théorème de Sturm, à l'exception toutefois de celle qui concerne le rapport $\dfrac{U_m}{U_{m-1}}$.

Soient $U_\mu(a)$ et $V_\mu(a)$ ce que deviennent U_μ et V_μ quand on y remplace y par a.

Substituons dans U_μ successivement -2 et $+2$,

$$\begin{aligned}
U_\mu(-2) &= V_\mu(-2) + V_{\mu-1}(-2) + \ldots + V_1(-2) + 1,\\
U_\mu(+2) &= V_\mu(+2) + V_{\mu-1}(+2) + \ldots + V_1(+2) + 1.
\end{aligned}$$

Or

$$V_\mu = \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right)^\mu + \left(\frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}\right)^\mu,$$

on aura donc

$$\begin{aligned}
V_\mu(-2) &= 2(-1)^\mu,\\
V_\mu(+2) &= 2,
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
U_\mu(-2) &= 2[(-1)^\mu + (-1)^{\mu-1} + \ldots + (-1)] + 1,\\
U_\mu(+2) &= 2\mu + 1
\end{aligned}$$

ou bien

$$U_\mu(-2) = (-1)^\mu \qquad \text{et} \qquad U_\mu(+2) = 2\mu + 1.$$

Les fonctions U_m, U_{m-1}, ..., U_1, U_0 ne présentent donc que des variations pour $y = -2$ et des permanences pour $y = +2$.

La suite $U_m, U_{m-1}, \ldots, U_1, U_0$ perd donc m variations quand y varie de -2 à $+2$; l'équation $U_m = 0$ a donc toutes ses racines réelles et comprises entre -2 et $+2$.

On voit de plus que le rapport $\frac{U_m}{U_{m-1}}$ passe toujours d'une valeur négative à une valeur positive quand y, en croissant, traverse une racine de l'équation $U_m = 0$.