E. FONTANEAU

Sur l'équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 455-471

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__455_1>

SUR L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ D'UNE ENVELOPPE SPHÉRIQUE;

PAR M. E. FONTANEAU.

1. Je m'occuperai d'abord du cas où l'on a, pour données du problème, les trois composantes de déformation u, v, w en un point quelconque de la surface. Cette question n'a pas été traitée par Lamé, mais elle est résolue au § 736 du *Traité de la Philosophie naturelle*, par MM. Thomson et Tait. J'emploie un procédé différent et qui semble ouvrir la voie à des applications plus

générales. J'exposerai d'abord les principes d'où dépend cette solution.

2. Soient, conformément aux notations de Lamé, $m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2, m_3, n_3, p_3$ les cosinus directeurs de trois axes rectangulaires OX′, OY′, OZ′ par rapport aux axes des coordonnées OX, OY, OZ. Si l'on désigne par ξ, η, ζ les déplacements suivant les axes du point dont les coordonnées sont $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= u + \left(1 + \frac{du}{dx}\right) dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz, \\ \eta &= v + \frac{dv}{dx} dx + \left(1 + \frac{dv}{dy}\right) dy + \frac{dv}{dz} dz, \\ \zeta &= w + \frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) dz, \end{aligned} \right.$$

et, de même, par rapport aux axes OX′, OY′, OZ′,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi' &= u' + \left(1 + \frac{du'}{dx'}\right) dx' + \frac{du'}{dy'} dy' + \frac{du'}{dz'} dz', \\ \eta' &= v' + \frac{dv'}{dx'} dx' + \left(1 + \frac{dv'}{dy'}\right) dy' + \frac{dv'}{dz'} dz', \\ \zeta' &= w' + \frac{dw'}{dx'} dx' + \frac{dw'}{dy'} dy' + \left(1 + \frac{dw'}{dz'}\right) dz'. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs il résulte des formules de transformation des coordonnées

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= m_1\, dx' + m_2\, dy' + m_3\, dz', \\ dy &= n_1\, dx' + n_2\, dy' + n_3\, dz', \\ dz &= p_1\, dx' + p_2\, dy' + p_3\, dz', \end{aligned} \right.$$

et

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi - u &= m_1(\xi' - u') + m_2(\eta' - v') + m_3(\zeta' - w'), \\ \eta - v &= n_1(\xi' - u') + n_2(\eta' - v') + n_3(\zeta' - w'), \\ \zeta - w &= p_1(\xi' - u') + p_2(\eta' - v') + p_3(\zeta' - w'). \end{aligned} \right.$$

Des relations (1) et (3), on déduit

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi - u = {} & \left[m_1\left(1+\frac{du}{dx}\right)+n_1\frac{du}{dy}+p_1\frac{du}{dz}\right]dx' \\
& +\left[m_2\left(1+\frac{du}{dx}\right)+n_2\frac{du}{dy}+p_2\frac{du}{dz}\right]dy' \\
& +\left[m_3\left(1+\frac{du}{dx}\right)+n_3\frac{du}{dy}+p_3\frac{du}{dz}\right]dz', \\
\eta - v = {} & \left[m_1\frac{dv}{dx}+n_1\left(1+\frac{dv}{dy}\right)+p_1\frac{dv}{dz}\right]dx' \\
& +\left[m_2\frac{dv}{dx}+n_2\left(1+\frac{dv}{dy}\right)+p_2\frac{dv}{dz}\right]dy' \\
& +\left[m_3\frac{dv}{dx}+n_3\left(1+\frac{dv}{dy}\right)+p_3\frac{dv}{dz}\right]dz', \\
\zeta - w = {} & \left[m_1\frac{dw}{dx}+n_1\frac{dw}{dy}+p_1\left(1+\frac{dw}{dz}\right)\right]dx' \\
& +\left[m_2\frac{dw}{dx}+n_2\frac{dw}{dy}+p_2\left(1+\frac{dw}{dz}\right)\right]dy' \\
& +\left[m_3\frac{dw}{dx}+n_3\frac{dw}{dy}+p_3\left(1+\frac{dw}{dz}\right)\right]dz',
\end{aligned}
\right.
$$

et des relations (2) et (4),

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\xi - u = {} & \left[m_1\left(1+\frac{du'}{dx'}\right)+m_2\frac{dv'}{dx'}+m_3\frac{dw'}{dx'}\right]dx' \\
& +\left[m_1\frac{du'}{dy'}+m_2\left(1+\frac{dv'}{dy'}\right)+m_3\frac{dw'}{dy'}\right]dy' \\
& +\left[m_1\frac{du'}{dz'}+m_2\frac{dv'}{dz'}+m_3\left(1+\frac{dw'}{dz'}\right)\right]dz', \\
\eta - v = {} & \left[n_1\left(1+\frac{du'}{dx'}\right)+n_2\frac{dv'}{dx'}+n_2\frac{dw'}{dx'}\right]dx' \\
& +\left[n_1\frac{du'}{dy'}+n_2\left(1+\frac{dv'}{dy'}\right)+n_3\frac{dw'}{dy'}\right]dy' \\
& +\left[n_1\frac{du'}{dz'}+n_2\frac{dv'}{dz'}+n_3\left(1+\frac{dw'}{dz'}\right)\right]dz', \\
\zeta - w = {} & \left[p_1\left(1+\frac{du'}{dx'}\right)+p_2\frac{dv'}{dx'}+p_3\frac{dw'}{dx'}\right]dx' \\
& +\left[p_1\frac{du'}{dy'}+p_2\left(1+\frac{dv'}{dy'}\right)+p_3\frac{dw'}{dy'}\right]dy' \\
& +\left[p_1\frac{du'}{dz'}+p_2\frac{dv'}{dz'}+p_3\left(1+\frac{dw'}{dz'}\right)\right]dz'.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme ces expressions (5) et (6) doivent être respectivement identiques, il en résulte

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
m_1 \frac{du}{dx} + n_1 \frac{du}{dy} + p_1 \frac{du}{dz} &= m_1 \frac{du'}{dx'} + m_2 \frac{dv'}{dx'} + m_3 \frac{dw'}{dx'},\\
m_1 \frac{dv}{dx} + n_1 \frac{dv}{dy} + p_1 \frac{dv}{dz} &= n_1 \frac{du'}{dx'} + n_2 \frac{dv'}{dx'} + n_3 \frac{dw'}{dx'},\\
m_1 \frac{dw}{dx} + n_1 \frac{dw}{dy} + p_1 \frac{dw}{dz} &= p_1 \frac{du'}{dx'} + p_2 \frac{dv'}{dx'} + p_3 \frac{dw'}{dx'};\\
m_2 \frac{du}{dx} + n_2 \frac{du}{dy} + p_2 \frac{du}{dz} &= m_1 \frac{du'}{dy'} + m_2 \frac{dv'}{dy'} + m_3 \frac{dw'}{dy'},\\
m_2 \frac{dv}{dx} + n_2 \frac{dv}{dy} + p_2 \frac{dv}{dz} &= n_1 \frac{du'}{dy'} + n_2 \frac{dv'}{dy'} + n_3 \frac{dw'}{dy'},\\
m_2 \frac{dw}{dx} + n_2 \frac{dw}{dy} + p_2 \frac{dw}{dz} &= p_1 \frac{du'}{dy'} + p_2 \frac{dv'}{dy'} + p_3 \frac{dw'}{dy'};\\
m_3 \frac{du}{dx} + n_3 \frac{du}{dy} + p_3 \frac{du}{dz} &= m_1 \frac{du'}{dz'} + m_2 \frac{dv'}{dz'} + m_3 \frac{dw'}{dz'},\\
m_3 \frac{dv}{dx} + n_3 \frac{dv}{dy} + p_3 \frac{dv}{dz} &= n_1 \frac{du'}{dz'} + n_2 \frac{dv'}{dz'} + n_3 \frac{dw'}{dz'},\\
m_3 \frac{dw}{dx} + n_3 \frac{dw}{dy} + p_3 \frac{dw}{dz} &= p_1 \frac{du'}{dz'} + p_2 \frac{dv'}{dz'} + p_3 \frac{dw'}{dz'}.
\end{aligned}
\right.
$$

On démontrerait, de la même manière, mais par un procédé inverse, neuf égalités analogues, et l'on peut se servir des unes ou des autres pour ce qui va suivre.

3. Les équations aux dérivées partielles de la déformation des corps en équilibre d'élasticité sont, en général,

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mu\,\Delta^2 u + (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dx} + \varepsilon X_0 &= 0,\\
\mu\,\Delta^2 v + (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dy} + \varepsilon Y_0 &= 0,\\
\mu\,\Delta^2 w + (\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \varepsilon Z_0 &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

où X_0, Y_0, Z_0 sont les composantes de la force extérieure appliquée à la masse au point quelconque (x, y, z), ε la densité en ce point et θ la dilatation cubique, tandis que Δ^2 sert à représenter l'opération $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$. On y satisfait, généralement, en posant

$$(9)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\Omega_1 - \dfrac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}\left(x\dfrac{d\Omega_1}{dx} + y\dfrac{d\Omega_2}{dx} + z\dfrac{d\Omega_3}{dx}\right), \\ v = \dfrac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\Omega_2 + \dfrac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}\left(x\dfrac{d\Omega_1}{dy} + y\dfrac{d\Omega_2}{dy} + z\dfrac{d\Omega_3}{dy}\right), \\ w = \dfrac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\Omega_3 + \dfrac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}\left(x\dfrac{d\Omega_1}{dz} + y\dfrac{d\Omega_2}{dz} + z\dfrac{d\Omega_3}{dz}\right), \end{cases}$$

où les fonctions $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sont déterminées comme il suit. Soit Δ une fonction de x, y, z assujettie à vérifier l'équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire

$$(10)\quad x\frac{d\Delta}{dx} + y\frac{d\Delta}{dy} + z\frac{d\Delta}{dz} - \frac{2\mu}{\lambda + \mu}\Delta = \frac{\varepsilon}{\mu}[xX_0 + yY_0 + zX_0],$$

on aura

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta^2\Omega_1 = -\dfrac{\varepsilon}{\mu}X_0 + \dfrac{d\Delta}{dx}, \\ \Delta^2\Omega_2 = -\dfrac{\varepsilon}{\mu}Y_0 + \dfrac{d\Delta}{dy}, \\ \Delta^2\Omega_3 = -\dfrac{\varepsilon}{\mu}Z_0 + \dfrac{d\Delta}{dz}. \end{cases}$$

Je ne démontre pas ici ces formules, dont la vérification est facile; il me suffit d'observer qu'elles pourront donner, dans tous les cas, une solution particulière des équations (8) et permettront ainsi d'y faire abstraction des termes tout connus. On y satisfait alors, toujours avec les formules (9), mais avec des fonctions Ω simplement assujetties à vérifier l'équation de Laplace,

$$(12)\quad \Delta^2\Omega = \frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{d^2\Omega}{dy^2} + \frac{d^2\Omega}{dz^2} = 0.$$

Je suppose que ces fonctions Ω soient homogènes et du même degré ν, aussi bien, par conséquent, que les composantes de déformation u, v, w. Il résulte alors des expressions (9)

$$(13)\quad xu+yv+zw=\frac{\lambda+3\mu-(\lambda+\mu)\nu}{2(\lambda+2\mu)}(x\Omega_1+y\Omega_2+z\Omega_3)$$

et l'on en déduit les suivantes :

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
u&=\Omega_1-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dx}(x\Omega_1+y\Omega_2+z\Omega_3)\\
&=\Omega_1-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\frac{d}{dx}(xu+yv+zw),\\
v&=\Omega_2-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dy}(x\Omega_1+y\Omega_2+z\Omega_3)\\
&=\Omega_2-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\frac{d}{dy}(xu+yv+zw),\\
w&=\Omega_3-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dz}(x\Omega_1+y\Omega_2+z\Omega_3)\\
&=\Omega_3-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\frac{d}{dz}(xu+yv+zw),
\end{aligned}\right.$$

et

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}
\Omega_1&=\frac{2(\lambda+2\mu)-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}u\\
&\quad+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\left(x\frac{du}{dx}+y\frac{dv}{dx}+z\frac{dw}{dx}\right),\\
\Omega_2&=\frac{2(\lambda+2\mu)-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}v\\
&\quad+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\left(x\frac{du}{dy}+y\frac{dv}{dy}+z\frac{dw}{dy}\right),\\
\Omega_3&=\frac{2(\lambda+2\mu)-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}w\\
&\quad+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}\left(x\frac{du}{dz}+y\frac{dv}{dz}+z\frac{dw}{dz}\right).
\end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on donne, pour tous les points de la surface d'un corps en équilibre d'élasticité, les trois composantes de déformation u, v, w, on aurait en ces points les trois potentiels Ω_1, Ω_2, Ω_3 si l'on pouvait obtenir, au moyen de ces composantes, les seconds membres des égalités (15) dont les derniers termes ne sont pas immédiatement connus. Je vais procéder à cette recherche.

4. Soient trois directions rectangulaires MX′, MY′, MZ′, définies respectivement par leurs cosinus directeurs

$$\frac{x}{r},\quad \frac{y}{r},\quad \frac{z}{r},$$
$$m_2,\quad n_2,\quad p_2,$$
$$m_3,\quad n_3,\quad p_3,$$

où r désigne le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au point $M(x, y, z)$. On aura, par les trois premières égalités (7),

$$(16)\quad\begin{cases} \dfrac{x}{r}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{y}{r}\dfrac{du}{dy}+\dfrac{z}{r}\dfrac{du}{dz}=\nu\dfrac{u}{r}=\dfrac{x}{r}\dfrac{du'}{dx'}+m_2\dfrac{dv'}{dx'}+m_3\dfrac{dw'}{dx'},\\[2mm] \dfrac{x}{r}\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{y}{r}\dfrac{dv}{dy}+\dfrac{z}{r}\dfrac{dv}{dz}=\nu\dfrac{v}{r}=\dfrac{y}{r}\dfrac{du'}{dx'}+n_2\dfrac{dv'}{dx'}+n_3\dfrac{dw'}{dx'},\\[2mm] \dfrac{x}{r}\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{y}{r}\dfrac{dw}{dy}+\dfrac{z}{r}\dfrac{dw}{dz}=\nu\dfrac{w}{r}=\dfrac{z}{r}\dfrac{du'}{dx'}+p_2\dfrac{dv'}{dx'}+p_3\dfrac{dw'}{dx'}, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(17)\quad\begin{cases} \dfrac{du'}{dx'}=\nu\dfrac{xu+yv+zw}{r^2},\\[2mm] \dfrac{dv'}{dx'}=\nu\dfrac{m_2u+n_2v+p_2w}{r},\\[2mm] \dfrac{dw'}{dx'}=\nu\dfrac{m_3u+n_3v+p_3w}{r}. \end{cases}$$

D'après cela, les expressions (15) deviennent

$$(18)\quad\begin{cases} \Omega_1=\dfrac{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}u+\dfrac{\lambda+\mu}{[\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)]\nu}\dfrac{d}{dx}r^2\dfrac{du'}{dx'},\\[2mm] \Omega_2=\dfrac{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}v+\dfrac{\lambda+\mu}{[\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)]\nu}\dfrac{d}{dy}r^2\dfrac{du'}{dx'},\\[2mm] \Omega_3=\dfrac{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)}w+\dfrac{\lambda+\mu}{[\lambda+3\mu-\nu(\lambda+\mu)]\nu}\dfrac{d}{dz}r^2\dfrac{du'}{dx'}. \end{cases}$$

Or on a

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dx} r^2 \frac{du'}{dx'} &= 2x \frac{du'}{dx'} + r^2 \left(\frac{d^2u'}{dx'^2}\frac{dx'}{dx} + \frac{d^2u'}{dx'\,dy'}\frac{dy'}{dx} + \frac{d^2u'}{dx'\,dz'}\frac{dz'}{dx}\right),\\
\frac{d}{dy} r^2 \frac{du'}{dx'} &= 2y \frac{du'}{dx'} + r^2 \left(\frac{d^2u'}{dx'^2}\frac{dx'}{dy} + \frac{d^2u'}{dx'\,dy'}\frac{dy'}{dy} + \frac{d^2u'}{dx'\,dz'}\frac{dz'}{dy}\right),\\
\frac{d}{dz} r^2 \frac{du'}{dx'} &= 2z \frac{du'}{dx'} + r^2 \left(\frac{d^2u'}{dx'^2}\frac{dx'}{dz} + \frac{d^2u'}{dx'\,dy'}\frac{dy'}{dz} + \frac{d^2u'}{dx'\,dz'}\frac{dz'}{dz}\right),
\end{aligned}\right.$$

et les valeurs des quotients différentiels de x', y' et z' étant données, il suffira, pour avoir les expressions de Ω_1, Ω_2, Ω_3, de connaître celles de

$$\frac{d^2u'}{dx'^2},\quad \frac{d^2u'}{dx'\,dy'},\quad \frac{d^2u'}{dx'\,dz'}.$$

J'emploie les coordonnées polaires, en posant

$$(20)\qquad x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad z = r\cos\vartheta$$

et je prends pour les cosinus directeurs

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
m_1 &= \frac{dx'}{dx} = \frac{dr}{dx} = \sin\vartheta\cos\varphi,\\
n_1 &= \frac{dx'}{dy} = \frac{dr}{dy} = \sin\vartheta\sin\varphi,\\
p_1 &= \frac{dx'}{dz} = \frac{dr}{dz} = \cos\vartheta;\\
m_2 &= \frac{dy'}{dx} = \frac{r\,d\varphi}{dx} = -\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta},\\
n_2 &= \frac{dy'}{dy} = \frac{r\,d\varphi}{dy} = \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta},\\
p_2 &= \frac{dy'}{dz} = \frac{r\,d\varphi}{dz} = 0,\\
m_3 &= \frac{dz'}{dx} = \frac{r\,d\vartheta}{dr} = \cos\vartheta\cos\varphi,\\
n_3 &= \frac{dz'}{dy} - \frac{r\,d\vartheta}{dy} = \cos\vartheta\sin\varphi,\\
p_3 &= \frac{dz'}{dz} = \frac{r\,d\vartheta}{dz} = -\sin\vartheta.
\end{aligned}\right.$$

D'après cela, il vient

$$
(22)\qquad\left\{
\begin{aligned}
\frac{du'}{dx'} &= \nu\,\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r},\\
\frac{dv'}{dx'} &= \nu\,\frac{-u \sin\varphi + v \cos\varphi}{r \sin\vartheta},\\
\frac{dw'}{dx'} &= \nu\,\frac{u \cos\vartheta \cos\varphi + v \cos\vartheta \sin\varphi - w \sin\vartheta}{r}
\end{aligned}
\right.
$$

et en posant, pour simplifier,

$$
(23)\qquad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)} = B_\nu,\\
&\frac{2(\lambda + 2\mu) - \nu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu - \nu(\lambda + \mu)} = 1 + B_\nu,
\end{aligned}
\right.
$$

on aura

$$
(24)\qquad\left\{
\begin{aligned}
\Omega_1 = u &+ 2B_\nu(u \sin\vartheta \cos\varphi - v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta)\varphi \sin\vartheta \cos\\
&+ B_\nu r^2 \sin\vartheta \cos\varphi \frac{d}{dr}\left(\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r}\right)\\
&- B_\nu r \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r}\right)\\
&+ B_\nu r \cos\vartheta \cos\varphi \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r}\right),\\
\Omega_2 = v &+ 2B_\nu(u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta) \sin\vartheta \sin\varphi\\
&+ B_\nu r^2 \sin\vartheta \sin\varphi \frac{d}{dr}\left(\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r}\right)\\
&+ B_\nu r \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r}\right)\\
&+ B_\nu r \cos\vartheta \sin\varphi \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r}\right),\\
\Omega_3 = w &+ 2B_\nu(u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta) \cos\vartheta\\
&+ B_\nu r^2 \cos\vartheta \frac{d}{dr}\left(\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r}\right)\\
&- B_\nu r \sin\vartheta \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{u \sin\vartheta \cos\varphi + v \sin\vartheta \sin\varphi + w \cos\vartheta}{r}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules s'appliquent à un point quelconque pris à l'intérieur du corps élastique; mais, lorsqu'il s'agit d'une des surfaces sphériques de l'enveloppe, u, v, w se réduisent à trois fonctions sphériques du même ordre ν dans lesquelles r ne figure pas. On se trouve alors, lorsqu'on veut prendre les dérivées $\frac{du}{dr}$, $\frac{dv}{dr}$, $\frac{dw}{dr}$, en présence d'une difficulté spéciale. Pour la lever, j'observe que l'on a (16)

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dr} = \dfrac{x}{r}\dfrac{du'}{dx'} + m_2\dfrac{dv'}{dx'} + m_3\dfrac{dw'}{dx'} = \nu\dfrac{u}{r}, \\ \dfrac{dv}{dr} = \dfrac{y}{r}\dfrac{du'}{dx'} + n_2\dfrac{dv'}{dx'} + n_3\dfrac{dw'}{dx'} = \nu\dfrac{v}{r}, \\ \dfrac{dw}{dr} = \dfrac{z}{r}\dfrac{du'}{dx'} + p_2\dfrac{dv'}{dx'} + p_3\dfrac{dw'}{dx'} = \nu\dfrac{w}{r}. \end{cases}$$

Ainsi l'on a définitivement, en remplaçant pour ce cas spécial Ω par Ψ,

$$(26)\quad \begin{cases} \Psi_1 = u + (\nu+1)\mathrm{B}_\nu \sin\vartheta\cos\varphi(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ \qquad - \mathrm{B}_\nu\dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\dfrac{d}{d\varphi}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ \qquad + \mathrm{B}_\nu\cos\vartheta\cos\varphi\dfrac{d}{d\vartheta}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta), \\ \Psi_2 = v + (\nu+1)\mathrm{B}_\nu \sin\vartheta\sin\varphi(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ \qquad + \mathrm{B}_\nu\dfrac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\dfrac{d}{d\varphi}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ \qquad + \mathrm{B}_\nu\cos\vartheta\sin\varphi\dfrac{d}{d\vartheta}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta), \\ \Psi_3 = w + (\nu+1)\mathrm{B}_\nu\cos\vartheta(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta) \\ \qquad - \mathrm{B}_\nu\sin\vartheta\dfrac{d}{d\vartheta}(u\sin\vartheta\cos\varphi + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\cos\vartheta). \end{cases}$$

Pour avoir ensuite les expressions des potentiels Ω_1, Ω_2, Ω_3 à l'intérieur du corps élastique, on n'a plus qu'à poser, pour les trois indices,

$$(27)\qquad \Omega = \left(\mathrm{M}_\nu\rho^\nu - \frac{\mathrm{N}_{\nu+1}}{\rho^{\nu+1}}\right)\Psi + \left(\frac{n_{\nu+1}}{\rho^{\nu+1}} - m_\nu\rho_\nu\right)\psi,$$

en prenant Ψ pour la surface sphérique de rayon R et ψ pour celle de rayon r, et puis à déterminer les constantes au moyen des égalités

$$(28)\quad \begin{cases} M_\nu R^\nu - \dfrac{N_{\nu+1}}{R^{\nu+1}} = 1, & \dfrac{n_{\nu+1}}{R^{\nu+1}} - m_\nu R_\nu = 0, \\ M_\nu r^\nu - \dfrac{N_{\nu+1}}{r^{\nu+1}} = 0, & \dfrac{n_{\nu+1}}{r^{\nu+1}} - m_\nu r^\nu = 1; \end{cases}$$

d'où il résulte

$$(29)\quad \begin{cases} M_\nu = \dfrac{R^{\nu+1}}{R^{2\nu+1} - r^{2\nu+1}}, & N_{\nu+1} = \dfrac{R^{\nu+1}\, r^{2\nu+1}}{R^{2\nu+1} - r^{2\nu+1}}, \\ m_\nu = \dfrac{r^{\nu+1}}{R^{2\nu+1} - r^{2\nu+1}}, & n_{\nu+1} = \dfrac{r^{\nu+1}\, R^{2\nu+1}}{R^{2\nu+1} - r^{2\nu+1}}; \end{cases}$$

car, ces valeurs étant substituées dans l'expression (27), le potentiel Ω devient Ψ sur la sphère de rayon R et ψ sur celle de rayon r.

On voit d'ailleurs que ce calcul revient à effectuer les opérations indiquées par la formule (27) sur les trois fonctions sphériques u, v, w.

Comme on peut toujours exprimer les composantes de déformation à la surface de la sphère en séries convergentes de fonctions sphériques, on aura ainsi pour Ω_1, Ω_2, Ω_3 des suites de groupes de termes correspondants du même degré d'homogénéité et en portant leurs expressions, après y avoir introduit x, y, z à la place de ρ, ϑ, φ par un changement inverse de coordonnées, on aura la solution du problème proposé.

5. Le problème de l'équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique, lorsqu'on donne pour chaque facette infinitésimale de la surface la force élastique y appliquée, a été, pour la première fois, résolu par Lamé à l'aide d'une méthode dont le principe est simple, mais qui conduit à des calculs compliqués. MM. Thomson et Tait ont repris la question au § 737 de leur *Traité de Philosophie naturelle,* et l'ont notablement simpli-

fiée. Il est aisé de la ramener à celle qui vient d'être traitée.

Si l'on désigne par F, G, H les trois composantes par rapport aux axes des x, des y et des z, de la force élastique donnée en un point quelconque de l'une des surfaces sphériques, on doit avoir

$$(30)\quad \begin{cases} \mathrm{F}r = \lambda\theta x + 2\mu\nu u + 2\mu(y\rho_3 - z\rho_2), \\ \mathrm{G}r = \lambda\theta y + 2\mu\nu v + 2\mu(z\rho_1 - x\rho_3), \\ \mathrm{H}r = \lambda\theta z + 2\mu\nu w + 2\mu(x\rho_2 - y\rho_1), \end{cases}$$

en désignant par r le rayon de la sphère considérée et par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les trois composantes de rotation suivant les axes des x, des y et des z définies par les égalités

$$(31)\quad 2\rho_1 = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \qquad 2\rho_2 = \frac{du}{dz} - \frac{dv}{dx}, \qquad 2\rho_3 = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

Les quantités $\mathrm{F}r$, $\mathrm{G}r$, $\mathrm{H}r$ ne sont données qu'à la surface du corps élastique, mais on peut les considérer comme des valeurs particulières des trois fonctions ξ, η, ζ bien définies à l'intérieur du corps. Ce sont les produits par le rayon vecteur des composantes de la force élastique appliquée à la facette normale à ce rayon au point quelconque (x, y, z). Ces fonctions satisfont à trois équations aux dérivées partielles du second ordre. On a, en effet,

$$(32)\quad \begin{cases} \Delta^2\xi = 2\lambda\dfrac{d\theta}{dx} + 2\mu\nu\Delta^2 u + 4\mu\left(\dfrac{d\rho_3}{dy} - \dfrac{d\rho_2}{dz}\right), \\ \Delta^2\eta = 2\lambda\dfrac{d\theta}{dy} + 2\mu\nu\Delta^2 v + 4\mu\left(\dfrac{d\rho_1}{dz} - \dfrac{d\rho_3}{dx}\right), \\ \Delta^2\zeta = 2\lambda\dfrac{d\theta}{dz} + 2\mu\nu\Delta^2 w + 4\mu\left(\dfrac{d\rho_2}{dx} - \dfrac{d\rho_1}{dy}\right), \end{cases}$$

et, si l'on a égard aux équations

$$(33)\quad \begin{cases} \mu\Delta^2 u + (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx} = 0, \\ \mu\Delta^2 v + (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy} = 0, \\ \mu\Delta^2 w + (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz} = 0, \end{cases}$$

et

$$(34)\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{d\theta}{dx} = 2\mu\left(\dfrac{d\rho_3}{dy} - \dfrac{d\rho_2}{dz}\right), \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{d\theta}{dy} = 2\mu\left(\dfrac{d\rho_1}{dz} - \dfrac{d\rho_3}{dx}\right), \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{d\theta}{dz} = 2\mu\left(\dfrac{d\rho_2}{dx} - \dfrac{d\rho_1}{dy}\right), \end{cases}$$

il vient

$$(35)\quad \begin{cases} \Delta^2\xi = -2(\lambda+\mu)(\nu-2)\dfrac{d\theta}{dx}, \\ \Delta^2\eta = -2(\lambda+\mu)(\nu-2)\dfrac{d\theta}{dy}, \\ \Delta^2\zeta = -2(\lambda+\mu)(\nu-2)\dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

Il résulte aussi des équations (30)

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = \lambda\left(\theta + x\dfrac{d\theta}{dx}\right) + 2\mu\nu\dfrac{du}{dx} + 2\mu\left(y\dfrac{d\rho_3}{dx} - z\dfrac{d\rho_2}{dx}\right), \\ \dfrac{d\eta}{dy} = \lambda\left(\theta + y\dfrac{d\theta}{dy}\right) + 2\mu\nu\dfrac{dv}{dy} + 2\mu\left(z\dfrac{d\rho_1}{dy} - x\dfrac{d\rho_3}{dy}\right), \\ \dfrac{d\zeta}{dz} = \lambda\left(\theta + z\dfrac{d\theta}{dz}\right) + 2\mu\nu\dfrac{dw}{dz} + 2\mu\left(x\dfrac{d\rho_2}{dz} - y\dfrac{d\rho_1}{dz}\right). \end{cases}$$

Or on a

$$(37)\quad \begin{cases} 2\left(\dfrac{d\rho_2}{dz} - \dfrac{d\rho_3}{dy}\right) = \Delta^2 u - \dfrac{d\theta}{dx}, \\ 2\left(\dfrac{d\rho_3}{dx} - \dfrac{d\rho_1}{dz}\right) = \Delta^2 v - \dfrac{d\theta}{dy}, \\ 2\left(\dfrac{d\rho_1}{dy} - \dfrac{d\rho_2}{dx}\right) = \Delta^2 w - \dfrac{d\theta}{dz}, \end{cases}$$

et, par suite des équations (34), il vient

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &2x\left(\frac{d\rho_2}{dz}-\frac{d\rho_3}{dy}\right)+2y\left(\frac{d\rho_3}{dx}-\frac{d\rho_1}{dz}\right)\\ &\qquad +2z\left(\frac{d\rho_1}{dy}-\frac{d\rho_3}{dx}\right)=-\frac{(\lambda+2\mu)(\nu-1)\theta}{\mu};\end{aligned}\right.$$

par conséquent, si, pour simplifier, on pose

$$(39)\qquad \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=\tau,$$

on aura, en faisant la somme des égalités (36),

$$(40)\quad \tau=\lambda(\nu+2)\theta+2\mu\nu\theta-(\lambda+2\mu)(\nu-1)\theta=(3\lambda+2\mu)\theta,$$

et les fonctions ξ, η, ζ devront vérifier les trois équations aux dérivées partielles

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &(3\lambda+2\mu)\Delta^2\xi+2(\lambda+\mu)(\nu-2)\frac{d\tau}{dx}=0,\\ &(3\lambda+2\mu)\Delta^2\eta+2(\lambda+\mu)(\nu-2)\frac{d\tau}{dy}=0,\\ &(3\lambda+2\mu)\Delta^2\zeta+2(\lambda+\mu)(\nu-2)\frac{d\tau}{dz}=0.\end{aligned}\right.$$

6. Ces équations sont semblables aux équations (33), et si, pour simplifier, on pose

$$(42)\qquad M=3\lambda+2\mu,\qquad L+M=2(\nu-2)(\lambda+\mu),$$

on y satisfera, d'une manière générale, en posant

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \xi&=\frac{L+3M}{2(L+2M)}\omega_1-\frac{L+M}{2(L+2M)}\left(x\frac{d\omega_1}{dx}+y\frac{d\omega_2}{dx}+z\frac{d\omega_3}{dx}\right),\\ \eta&=\frac{L+3M}{2(L+2M)}\omega_2-\frac{L+M}{2(L+2M)}\left(x\frac{d\omega_1}{dy}+y\frac{d\omega_2}{dy}+z\frac{d\omega_3}{dy}\right),\\ \zeta&=\frac{L+3M}{2(L+2M)}\omega_3-\frac{L+M}{2(L+2M)}\left(x\frac{d\omega_1}{dz}+y\frac{d\omega_2}{dz}+z\frac{d\omega_3}{dz}\right),\end{aligned}\right.$$

où ω_1, ω_2, ω_3 désignent trois potentiels. D'après cela, il sera facile, en procédant comme plus haut, de déterminer pour un point quelconque du corps les trois fonctions ξ, η, ζ d'après les valeurs qu'elles ont en un point quelconque de ses deux surfaces sphériques. Ayant effectué ce calcul, on aura la dilatation cubique θ au moyen de l'égalité (40).

Quant aux trois composantes de rotation ρ_1, ρ_2, ρ_3, elles peuvent être obtenues comme il suit. On déduit des équations (30), en ayant égard à l'identité

$$\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy} + \frac{d\rho_3}{dz} = 0,$$

ces égalités

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} &= \lambda\left(y\frac{d\theta}{dx} - x\frac{d\theta}{dy}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_3 \\
&= \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(y\frac{d\tau}{dx} - x\frac{d\tau}{dy}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_3, \\
\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} &= \lambda\left(z\frac{d\theta}{dy} - y\frac{d\theta}{dz}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_1 \\
&= \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(z\frac{d\tau}{dy} - y\frac{d\tau}{dz}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_1, \\
\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} &= \lambda\left(x\frac{d\theta}{dz} - z\frac{d\theta}{dx}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_2 \\
&= \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(x\frac{d\tau}{dz} - z\frac{d\tau}{dx}\right) + 2\mu(\nu-1)\rho_2,
\end{aligned}\right.$$

au moyen desquelles on pourra calculer les trois composantes de rotation.

Enfin les composantes de déformation u, v, w seront données par les égalités suivantes, qui résultent immédiatement des équations (30),

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\mu\nu}\xi - \frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\tau x + \frac{1}{\nu}(z\rho_2 - y\rho_3), \\
v &= \frac{1}{2\mu\nu}\eta - \frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\tau y + \frac{1}{\nu}(x\rho_3 - z\rho_1), \\
w &= \frac{1}{2\mu\nu}\zeta - \frac{\lambda}{2(3\lambda+2\mu)\mu\nu}\tau z + \frac{1}{\nu}(y\rho_1 - x\rho_2),
\end{aligned}\right.$$

où il faudra remplacer les composantes de rotation ρ_1, ρ_2, ρ_3 par leurs expressions tirées des relations (44). On voit ainsi que, dans le cas des enveloppes sphériques, les fonctions ξ, η, ζ jouent un rôle semblable à celui des fonctions u, v, w et peuvent les remplacer pour la détermination des éléments principaux de la déformation du corps élastique.

On peut faire une autre remarque. Si, dans les équations (30), on introduit, à la place des fonctions qui figurent dans leurs seconds membres, les trois potentiels Ω_1, Ω_2, Ω_3, il vient

$$(46)\quad \begin{cases} \xi = \lambda x \left(\dfrac{d\Omega_1}{dx} + \dfrac{d\Omega_2}{dy} + \dfrac{d\Omega_3}{dz}\right) \\ \qquad + \dfrac{\mu}{\lambda + 2\mu}\nu\,\Omega_1 + \mu\,\dfrac{\lambda + 2\mu - (\lambda+\mu)\nu}{\lambda + 2\mu}\left(x\dfrac{d\Omega_1}{dx} + y\dfrac{d\Omega_2}{dx} + z\dfrac{d\Omega_3}{dx}\right), \\ \eta = \lambda y \left(\dfrac{d\Omega_1}{dx} + \dfrac{d\Omega_2}{dy} + \dfrac{d\Omega_3}{dz}\right) \\ \qquad + \dfrac{\mu}{\lambda + 2\mu}\nu\,\Omega_2 + \mu\,\dfrac{\lambda + 2\mu - (\lambda+\mu)\nu}{\lambda + 2\mu}\left(x\dfrac{d\Omega_1}{dy} - y\dfrac{d\Omega_2}{dy} + z\dfrac{d\Omega_3}{dy}\right), \\ \zeta = \lambda z \left(\dfrac{d\Omega_1}{dx} + \dfrac{d\Omega_2}{dy} + \dfrac{d\Omega_3}{dz}\right) \\ \qquad + \dfrac{\mu}{\lambda + 2\mu}\nu\,\Omega_3 + \mu\,\dfrac{\lambda - 2\mu - (\lambda+\mu)\nu}{\lambda + 2\mu}\left(x\dfrac{d\Omega_1}{dz} + y\dfrac{d\Omega_2}{dz} + z\dfrac{d\Omega_3}{dz}\right). \end{cases}$$

Ces expressions, substituées dans les équations aux dérivées partielles (41), devront les vérifier identiquement, et il est aisé de s'assurer qu'il en est ainsi. Elles en donnent donc les formules générales d'intégration tout aussi bien que les égalités (43), mais sous une autre forme. Si des relations (42) on déduit les expressions de λ et de μ,

$$(47)\qquad \lambda = \frac{M\nu - 3M - L}{\nu - 2}, \qquad \mu = \frac{3L + 7M - 2M\nu}{2(\nu - 2)},$$

et qu'on les substitue dans les expressions (46), puis qu'on y remplace L et M par λ et μ; enfin, ξ, η, ζ respectivement par u, v, w, on aura ainsi un autre mode de solution des équations (33), d'ailleurs moins simple que ceux auxquels on arrive par le calcul direct.