Nouvelles annales de mathématiques

Maximilien Marie

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 161-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__161_0>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

8. *Des asymptotes aux courbes imaginaires.* — Lorsque le coefficient du premier terme d'une équation algébrique se rapproche de zéro, l'une des racines de cette équation grandit indéfiniment; mais, en devenant infinie, elle devient indéterminée : son module devient infini, mais son argument reste indéterminé si, du moins, on ignore comment le coefficient du premier terme de l'équation considérée est lui-même parvenu à la valeur zéro; car, zéro est aussi indéterminé que l'infini, étant l'un et l'autre des nombres dont les modules ont diminué ou crû indéfiniment, leurs arguments pouvant être restés quelconques.

Supposons que deux équations algébriques

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1(x, y) = 0,$$

de degrés m et n, soient telles que l'élimination entre elles de y conduise à une équation en x, de degré $mn - p$, on dira que p des points d'intersection des deux lieux se sont transportés à l'infini, ce qui exprimera simplement qu'il n'en est resté que $mn - p$, à distance finie; mais, en réalité, les abscisses et, par conséquent, les ordonnées des p points passés à l'infini seront

(¹) *Voir* même tome, p. 60.

devenues indéterminées : en réalité, les deux lieux auront p infinités de points communs à l'infini.

Mais, si, au lieu des lieux superficiels $f = 0$ et $f_1 = 0$, on considère spécialement, sur ces deux lieux, les deux courbes qui seraient définies par les mêmes équations, auxquelles on aurait adjoint une équation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

ces deux courbes auront seulement p points communs à l'infini.

Quant aux arguments des coordonnées de ces p points rejetés à l'infini, ils seront parfaitement déterminés.

En effet, les valeurs infinies de x et de y devront satisfaire indifféremment à l'un ou l'autre des deux systèmes

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad f_1 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0,$$

ces deux systèmes admettant également les solutions infinies considérées.

Supposons qu'on les recherche dans les équations f et φ : l'équation $f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0$ se décomposera en deux autres, dont les premiers membres, pour des valeurs infinies de α, β, α' et β', se réduiront aux parties homogènes des plus hauts degrés; de même, l'équation $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, pour les mêmes valeurs infinies de α, β, α' et β', se réduira aussi à une équation homogène en α, β, α' et β'.

Les valeurs infinies de α, β, α' et β' seront donc déterminées par trois équations homogènes qui assigneront les valeurs des rapports deux à deux de ces quatre quantités, et, notamment, celles des rapports $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\beta'}{\alpha'}$, ou les valeurs des tangentes des arguments de x et de y devenus infinis.

Cela posé, supposons que l'on ait recherché, par les méthodes ordinaires, les asymptotes d'un lieu

$$f(x, y) = 0,$$

et qu'on ait trouvé pour l'une d'elles un coefficient angulaire égal à $m + n\sqrt{-1}$, et une ordonnée à l'origine, égale à $p + q\sqrt{-1}$: en raison du calcul même, l'élimination de y entre

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

fournira une équation d'un degré moindre de deux unités que celui de $f(x, y) = 0$.

Ainsi, si l'on adjoignait séparément, aux deux équations

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

une même relation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

les deux courbes ainsi définies seraient asymptotes l'une à l'autre, et auraient en commun deux points à l'infini.

Les conclusions seront les mêmes si l'on prend, pour relation complémentaire commune, $\frac{\beta'}{\beta} = c$; mais alors les deux courbes considérées seront : l'une la conjuguée c du lieu

$$f(x, y) = 0$$

et l'autre la droite de caractéristique c du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}.$$

On voit ainsi que, lorsqu'on rencontre, pour un lieu algébrique, une asymptote imaginaire, en réalité, on a trouvé un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées de ce lieu.

On peut vérifier cette proposition de la manière suivante :

Si, en recherchant les asymptotes d'une courbe $f(x, y) = 0$, on a trouvé, pour l'une d'elles,

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

il résultera du calcul même que, l'une des formes de y, définie par l'équation $f(x, y) = 0$, se trouvera être

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

plus une fonction $\varphi(x)$ dont le module tendrait vers zéro, lorsque le module de x croîtrait indéfiniment. Mais, si l'on considère les deux lieux à abscisses réelles, définis par les deux équations

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

et

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1} + \varphi(x),$$

d'une part, ils se réduiront, le premier, à la conjuguée $c = \infty$ du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1};$$

et, le second, à une branche de la conjuguée $c = \infty$ du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

D'ailleurs, les équations en coordonnées réelles de ces deux lignes seront, la première,

$$y = (m + n)x + p + q$$

et, la seconde,

$$y = (m + n)x + p + q + \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

$\varphi_1(x)$ désignant la partie réelle évanouissante de $\varphi(x)$, et $\varphi_2(x)$ le coefficient, aussi évanouissant, de $\sqrt{-1}$, dans $\varphi(x)$.

La droite $c = \infty$ du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

sera donc asymptote à la conjuguée $c = \infty$ du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

Cela posé, il est clair que, si deux lieux, de degrés m et n, sont tels qu'en éliminant y entre leurs équations par rapport à un système donné d'axes, l'équation résultante en x soit du degré $mn - p$ seulement, il en sera toujours de même, quels que soient les nouveaux axes auxquels on viendrait ensuite à rapporter les deux lieux, parce que, aux $mn - p$ solutions finies trouvées précédemment, il correspondra toujours, en raison des formules de transformation, $mn - p$ solutions finies, nouvelles, et que, aux p anciennes solutions infinies, il correspondra, de même, p solutions nouvelles infinies.

Il en résulte que, si l'élimination de y entre

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

et une équation

$$f(x, y) = 0$$

de degré m, conduit à une équation en x, de degré $(m - 2)$ seulement, le même fait se reproduira entre les équations des deux mêmes lieux rapportés ensuite à de nouveaux axes quelconques; de sorte que les conjuguées des deux lieux, dont les cordes réelles seraient parallèles au nouvel axe des y, seront perpétuellement asymptotes l'une à l'autre. On voit ainsi que, si l'une des asymptotes d'une courbe se présente sous une forme imaginaire

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

cette équation représentera un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées de la courbe, et que la conjuguée c du faisceau sera l'une des asymptotes de la conjuguée c de la courbe.

Une asymptote réelle, $y = cx + d$, à la courbe réelle est aussi asymptote à la conjuguée c du lieu; en effet, $y = cx + d$ sera une corde réelle de la conjuguée $\frac{\beta'}{\beta} = c$ du lieu, mais elle coupera cette conjuguée à l'infini. La même asymptote réelle $y = cx + d$ sera aussi généralement asymptote à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, parce que c correspondra généralement à une direction limite, pour les tangentes à la courbe réelle, de sorte que si l'on faisait varier c infiniment peu, dans un sens convenable, l'ordonnée à l'origine de la tangente parallèle à la nouvelle direction deviendrait imaginaire.

Si l'on avait trouvé pour une asymptote d'un lieu une équation à coefficient angulaire réel

$$y = mx + p + q\sqrt{-1},$$

cette équation représenterait une tangente à l'infini à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire une asymptote à cette enveloppe.

L'équation en coordonnées réelles de cette asymptote serait d'ailleurs

$$y = mx + p + q.$$

Corollaire I. — Le nombre des asymptotes réelles ou imaginaires, d'une courbe de degré m est m; mais l'équation d'une asymptote imaginaire en fournit une effective pour chaque conjuguée; on en conclut que le nombre total des asymptotes de la courbe réelle et d'une quelconque de ses conjuguées est toujours m.

Corollaire II. — Si les asymptotes d'une courbe de degré m, étaient réelles, chacune d'elles, à la vérité, pourrait être considérée comme asymptote à la conjuguée du lieu dont la caractéristique serait égale au coefficient angulaire de cette asymptote ; mais les conjuguées, dont les caractéristiques n'auraient pour valeurs aucun des m coefficients angulaires des m asymptotes, n'auraient pas d'asymptotes, ni par conséquent de branches infinies; elles seraient donc entièrement composées d'anneaux fermés.

9. *Théorie des contacts des divers ordres des courbes imaginaires et, en particulier, de leur courbure.* — Si deux équations

$$f(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(X, Y) = 0,$$

qui admettent une solution commune

$$x = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}, \qquad y = \alpha'_0 + \beta'_0 \sqrt{-1},$$

fournissent, pour cette solution, les mêmes valeurs de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^py}{dx^p}$, et si l'on adjoint séparément aux deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ une même condition complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

admettant la solution $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\alpha' = \alpha'_0$ et $\beta' = \beta'_0$, les deux courbes ainsi définies, réalisées selon la règle générale par $x_1 = \alpha + \beta$ et $y_1 = \alpha' + \beta'$, auront $p + 1$ points communs confondus avec le point

$$[\alpha_0 + \beta_0, \alpha'_0 - \beta'_0],$$

c'est-à-dire auront en ce point un contact de l'ordre p.

En effet, soient, au point $[x, y]$,

$$\frac{dy}{dx} = m_1 + n_1\sqrt{-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m_2 + n_2\sqrt{-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^py}{dx^p} = m_p + n_p\sqrt{-1},$$

les valeurs communes, fournies séparément par les deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ pour $X = x$ et $Y = y$, des p premières dérivées de Y par rapport à X, si l'on veut connaître les coordonnées $[x + d_1 x, y + d_1 y]$ de deux points infiniment voisins du point $[x, y]$, sur les deux courbes considérées, en posant $d_1 x = d\alpha_0 + d\beta_0\sqrt{-1}$ et $d'_1 y = d\alpha'_0 + d\beta'_0\sqrt{-1}$, on aura, pour déterminer $d\alpha_0$, $d\beta_0$, $d\alpha'_0$ et $d\beta'_0$, les conditions

$$d\alpha'_0 + d\beta'_0\sqrt{-1} = (m_1 + n_1\sqrt{-1})(d\alpha_0 + d\beta_0\sqrt{-1})$$

ou

$$d\alpha'_0 = m_1\, d\alpha_0 - n_1\, d\beta_0$$

et

$$d\beta'_0 = m_1\, d\beta_0 + n_1\, d\alpha_0,$$

avec

$$\varphi'_{\alpha_0} d\alpha_0 + \varphi'_{\beta_0} d\beta_0 + \varphi'_{\alpha'_0} d\alpha'_0 + \varphi'_{\beta'_0} d\beta'_0 = 0:$$

c'est-à-dire, pour les deux courbes, trois équations homogènes identiques entre $d\alpha_0$, $d\beta_0$, $d\alpha'_0$ et $d\beta'_0$, d'où l'on conclura les mêmes valeurs pour $\frac{d\beta_0}{d\alpha_0}$, et, par suite, pour $\frac{d\beta'_0}{d\alpha'_0}$, c'est-à-dire pour $d_1 x$ et pour $d_1 y$, si l'on suppose qu'on prenne, des deux côtés, la même valeur pour $d\alpha_0$.

Les deux courbes auront donc un second point commun confondu avec le point $[\alpha_0 + \beta_0, \alpha'_0 + \beta'_0]$, et les coordonnées imaginaires de ce second point seront $x + d_1 x$ et $y + d_1 y$.

En ce second point, les dérivées de y par rapport à x, tirées de l'une ou de l'autre des équations $f = 0$ ou $f_1 = 0$, auront pris leurs anciennes valeurs augmentées des produits par $d_1 x$ de leurs dérivées, c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = (m_1 + n_1 \sqrt{-1}) + (m_2 + n_2 \sqrt{-1})\, d_1 x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (m_2 + n_2 \sqrt{-1}) + (m_3 + n_3 \sqrt{-1})\, d_1 x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} = (m_{p-1} + n_{p-1} \sqrt{-1}) + (m_p + n_p \sqrt{-1})\, d_1 x;$$

elles seront donc les mêmes de part et d'autre, jusqu'à l'ordre $p - 1$.

Quant aux dérivées p^{iemes} de y par rapport à x, elles ne seraient plus les mêmes au point $[x + d_1 x, y + d_1 y]$, $m_{p+1} + n_{p+1}\sqrt{-1}$ n'ayant plus la même valeur sur les deux lieux.

Quoi qu'il en soit, on démontrera comme précédemment que les deux courbes auront encore, au delà du point correspondant à la solution $(x + d_1 x,\ y + d_1 y)$, un autre point commun $[x + d_1 x + d_2 x,\ y + d_1 y + d_2 y]$, et ainsi de suite, jusqu'au $(p+1)^{\text{ieme}}$ point

$$[x + d_1 x + d_2 x + \ldots + d_p x,\ y + d_1 y + d_2 y + \ldots + d_p y];$$

mais le raisonnement ne pourrait pas s'étendre au delà, puisque, arrivés à ce $(p+1)^{\text{ieme}}$ point, on ne pourrait plus dire que les dérivées premières de y par rapport à x seraient encore les mêmes, soit qu'on les tirât de $f = 0$ ou de $f_1 = 0$.

Le théorème énoncé est donc établi quelle que soit la relation $\varphi = 0$.

Il subsistera si, au lieu d'une relation de forme quelconque, satisfaite par les valeurs α_0, β_0, α'_0, β'_0 des variables, on prend spécialement la relation

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\beta'_0}{\beta_0} = c,$$

c étant la caractéristique du point $[x_0, y_0]$, et alors le théorème s'énoncera dans les termes suivants :

Si, en un point commun à deux lieux $f(X, Y) = 0$ et $f_1(X, Y) = 0$, les dérivées de X par rapport à Y, jusqu'à la p^{ieme}, sont les mêmes, soit qu'on les tire de l'équation $f = 0$ ou de l'équation $f_1 = 0$, les conjuguées des deux lieux, passant par ce point commun, y auront un contact du p^{ieme} ordre.

Le théorème subsisterait encore si, au lieu d'être définies par une équation commune $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, les deux courbes considérées l'étaient par la condition concrète, de constituer les enveloppes imaginaires des conjuguées des deux lieux $f = 0$ et $f_1 = 0$, c'est-à-dire que, si les enveloppes imaginaires de deux lieux $f = 0$ et $f_1 = 0$ ont un point commun $[x, y]$ et que les deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ fournissent séparément les mêmes valeurs en ce point pour

$$\frac{dY}{dX}, \quad \frac{d^2Y}{dX^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^pY}{dX^p},$$

les deux enveloppes imaginaires auront, au point réalisant la solution $X = x$, $Y = y$ un contact de l'ordre p.

Mais la démonstration doit être un peu modifiée pour s'appliquer à ce cas.

Soient au point $[x, y]$, commun aux deux enveloppes,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = m_1, \quad \text{quantité réelle, par hypothèse,}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m_2 + n_2\sqrt{-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d^py}{dx^p}\right) = m_p + n_p\sqrt{-1}.$$

les valeurs communes des dérivées de Y par rapport à X, au point $[x, y]$, tirées de $f(X, Y) = 0$ ou de $f_1(Y, X) = 0$.

Si l'on voulait obtenir, sur l'une ou l'autre enveloppe, un point $[x + d_1 x, y + d_1 y]$ infiniment voisin du point $[x, y]$, en faisant $d_1 x = d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}$ et $d_1 y = d_1 \alpha'_0 + d_1 \beta'_0 \sqrt{-1}$, on devrait d'abord, dans les deux cas, faire

$$\frac{d_1 \alpha'_0 + d_1 \beta'_0 \sqrt{-1}}{d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}} = m_1,$$

c'est-à-dire

$$d_1 \alpha'_0 = m_1 d_1 \alpha_0 \qquad \text{et} \qquad d_1 \beta'_0 = m_1 d_1 \beta_0 :$$

d'un autre côté, le point $[x_1 + d_1 x, y + d_1 y]$ ayant dû rester sur l'une ou l'autre enveloppe, il faudrait que la valeur de $\left(\frac{dY}{dX}\right)$ en ce point fût restée réelle, mais cette nouvelle valeur de $\frac{dY}{dX}$ se formerait dans les deux cas de l'ancienne m_1, augmentée du produit par $d_1 x$, de sa dérivée, c'est-à-dire de

$$(m_2 + n_2 \sqrt{-1}) d_1 x \quad \text{ou} \quad (m_2 + n_2 \sqrt{-1})(d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}),$$

$d_1 \alpha_0$ et $d_1 \beta_0$ devraient donc dans les deux cas satisfaire à la même condition

$$m_2 d_1 \beta_0 + n_2 d_1 \alpha_0 = 0,$$

d'où

$$\frac{d_1 \beta_0}{d_1 \alpha_0} = -\frac{n_2}{m_2},$$

de sorte que si l'on prenait, dans les deux cas, la même valeur pour $d_1 \alpha_0$, on trouverait les mêmes valeurs pour $d_1 x$ et $d_1 y$.

D'où l'on voit que, dans les hypothèses admises, les deux enveloppes auront au moins deux points infiniment voisins communs, correspondant aux deux solutions $[x, y]$ et $[x + d_1 x, \ y + d_1 y]$.

Au second point $[x + d_1 x, \ y + d_1 y]$, les dérivées de Y par rapport à X seront devenues

$$\frac{dY}{dX} = m_1 + (m_2 + n_2 \sqrt{-1})\, d_1 x, \quad \text{quantité réelle,}$$

$$\frac{d^2 Y}{dX} = (m_2 + n_2 \sqrt{-1}) + (m_3 + n_3 \sqrt{-1})\, d_1 x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} = (m_{p-1} + n_{p-1}\sqrt{-1}) + (m_p + n_p\sqrt{-1})\, d_1 x;$$

elles seront encore les mêmes sur les deux lieux, jusqu'à l'ordre $p - 1$; on démontrerait donc, comme précédemment, que les deux enveloppes auront encore en commun un troisième point

$$[x + d_1 x + d_2 x, \ y + d_1 y + d_2 y],$$

et ainsi de suite jusqu'au $(p + 1)^{\text{ième}}$ point. En résumé, les deux enveloppes auront $p + 1$ points communs infiniment voisins du point $[x, y]$, c'est-à-dire auront en ce point un contact de l'ordre p.

Il résulte immédiatement de ces deux théorèmes généraux :

1° Que le rayon de courbure d'une conjuguée quelconque d'un lieu quelconque, au point où cette conjuguée touche l'enveloppe réelle du lieu, est égal au rayon de courbure de cette enveloppe réelle au même point.

En effet, si l'on a déterminé par le calcul le centre $[a, b]$ et le rayon R du cercle osculateur à une courbe $f(X, Y) = 0$ en l'un de ses points réels $[x, y]$, les deux équations

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad (X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$$

admettront la solution commune $[x, y]$ et fourniront en ce point, pour $\frac{dY}{dX}$ et $\frac{d^2Y}{dX^2}$, les mêmes valeurs; les conjuguées des deux courbes réelles qui se toucheront en ce point auront donc aussi entre elles un contact du second ordre, c'est-à-dire auront même rayon de courbure; mais on constate aisément que l'hyperbole équilatère conjuguée d'un cercle a, en son sommet, pour rayon de courbure, le rayon même du cercle.

On en conclut le théorème énoncé.

2° Si la valeur de l'expression

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

calculée en un point $[x, y]$ de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu $f(X, Y) = 0$, est

$$r + r'\sqrt{-1},$$

le rayon de courbure de cette enveloppe en ce point $[x, y]$ sera

$$r + r'.$$

En effet, si les formules usuelles ont donné, pour les coordonnées du centre du cercle osculateur au point $[x, y]$ de $f(X, Y) = 0$,

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad a' + b'\sqrt{-1},$$

les deux équations

$$f(X, Y) = 0$$

et

$$(X - a - b\sqrt{-1})^2 + (Y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

admettront la solution commune $[x, y]$ et fourniront, pour $\frac{dY}{dX}$ et pour $\frac{d^2Y}{dX^2}$, les mêmes valeurs en ce point; mais $\frac{dy}{dx}$ sera réel, le point $[x, y]$ étant supposé appartenir à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$, ce point appartiendra donc aussi à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$(X - a - b\sqrt{-1})^2 - (Y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r - r'\sqrt{-1})^2,$$

c'est-à-dire au cercle

$$(X - a - b)^2 + (Y - a' - b')^2 = (r + r')^2;$$

d'ailleurs les enveloppes imaginaires des deux lieux auront entre elles un contact du second ordre au point correspondant à la solution $[x, y]$; elles auront donc, en ce point, même rayon de courbure.

On en conclut le théorème énoncé.

Parabole osculatrice d'ordre p à une conjuguée quelconque en un quelconque de ses points. — La parabole osculatrice d'ordre p, à une courbe réelle, en un de ses points $[x, y]$, est représentée par l'équation

$$Y = y - \frac{dy}{dx}(X - x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X - x)^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^py}{dx^p}\frac{(X - x)^n}{1.2\ldots n}.$$

Si l'on avait rapporté un lieu $f(X, Y) = 0$ à des axes tels, que les abscisses de la conjuguée c de ce lieu devinssent réelles, l'équation en coordonnées imaginaires d'une des branches de cette conjuguée prendrait la forme

$$Y' = \varphi(X') + \psi(X')\sqrt{-1},$$

X' étant réel; mais l'équation de cette branche, en coordonnées réelles, serait

$$Y'_1 = \varphi(X'_1) + \psi(X'_1);$$

les dérivées de Y' par rapport à X' étant supposées égales à

$$m_1 + n_1\sqrt{-1},$$
$$m_2 + n_2\sqrt{-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$m_p + n_p\sqrt{-1},$$

celles de Y'_1 par rapport à X'_1 seraient

$$m_1 - n_1,$$
$$m_2 + n_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$m_p + n_p;$$

l'équation de la parabole osculatrice d'ordre p, à la conjuguée considérée, au point $[x'_1, y'_1]$, serait donc, dans le nouveau système d'axes,

$$Y_1 = y'_1 + (m_1 + n_1)\frac{X'_1 - x'_1}{1} + (m_2 - n_2)\frac{(X'_1 - x'_1)^2}{1.2} + \dots + (m_p - n_p)\frac{(X'_1 - x'_1)^p}{1.2\dots p}.$$

On obtiendrait donc immédiatement l'équation, dans le nouveau système d'axes, de la parabole cherchée, si l'on connaissait les dérivées $m_1 + n_1\sqrt{-1}$, ..., $m_p + n_p\sqrt{-1}$ de la nouvelle ordonnée y' par rapport à la nouvelle abscisse; mais ces dérivées $\frac{dy'}{dx'}$, ..., $\frac{d^py'}{dx'^p}$ pourront toujours être trouvées en fonction de $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^py}{dx^p}$, sans qu'on soit obligé d'effectuer la transformation des coordonnées; il suffira en effet, pour cela, de dériver jusqu'à l'ordre p les formules de la transformation.

Ainsi, supposons, pour plus de simplicité, que les premiers axes fussent rectangulaires, qu'on ait conservé l'ancien axe des x et qu'on ait seulement dirigé l'axe des y' parallèlement aux cordes réelles de la conjuguée en question : les formules de transformation seront

$$y' = \frac{y}{\sin\alpha'} \qquad \text{et} \qquad x' = x - y\cot\alpha',$$

α' désignant l'angle du nouvel axe des y avec l'ancien axe des x.

On déduira de ces formules

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dx'} \qquad \text{et} \qquad \frac{dx'}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}\cot\alpha',$$

d'où

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{dy}{dx}\frac{1}{1 - \dfrac{dy}{dx}\cot\alpha'};$$

puis

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{d\dfrac{\dfrac{dy}{dx}}{1 - \dfrac{dy}{dx}\cot\alpha'}}{dx}\frac{dx}{dx'}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\dfrac{\dfrac{dy}{dx}}{1 - \dfrac{dy}{dx}\cot\alpha'}}{dx}\frac{1}{1 - \dfrac{dy}{dx}\cot\alpha'},$$

et ainsi de suite.

On pourrait donc développer en série, par la formule de Taylor, l'ordonnée réalisée d'une conjuguée quelconque d'un lieu quelconque.

Revenons au rayon de courbure d'une conjuguée quelconque en un quelconque de ses points.

Si le lieu était rapporté à deux axes rectangulaires dont l'un, celui des y, fût parallèle aux cordes réelles de la conjuguée considérée, et si $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ avaient pour valeurs, en un point de cette conjuguée,

$$\frac{dy}{dx} = m + n\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p + q\sqrt{-1},$$

les dérivées de l'ordonnée réalisée, par rapport à l'abscisse réelle, auraient en ce point pour valeurs

$$\frac{dy_1}{dx_1} = m + n \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = p + q,$$

en sorte que le rayon de courbure serait représenté par

$$R = \frac{[1 + (m+n)^2]^{\frac{3}{2}}}{p+q}.$$

Si le lieu était rapporté à des axes rectangulaires quelconques, les formules de transformation feraient connaître, comme on l'a vu, les quantités cherchées $m + n$ et $p + q$.

Le calcul fait directement donne, par rapport à des axes rectangulaires quelconques,

$$R = \left[\frac{(n+c)^2 + n^2(n-c)^2}{1-n^2}\right]^{\frac{3}{2}} \frac{r^2 + r'^2}{(r - r')(c^3 - 3cn^2) + (r + r')(3c^2n - n^3)},$$

où c désigne la caractéristique de la conjuguée considérée, $r + r'\sqrt{-1}$ la valeur de l'expression

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

calculée au point considéré, et n le rapport du petit au grand axe de l'ellipse évanouissante

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

qui contient les éléments du lieu au point considéré.

Si le point considéré de la conjuguée c était celui où elle touche l'enveloppe imaginaire, n serait nul et la formule précédente se réduirait à

$$R = c^3 \frac{r^2 + r'^2}{c^3(r - r')} = \frac{r^2 + r'^2}{r - r'};$$

on peut arriver à ce résultat en partant de la formule donnée plus haut

$$R = \frac{[1 + (m + n)^2]^{\frac{3}{2}}}{p + q}.$$

En y faisant d'abord $n = 0$, puisque le point considéré appartient à l'enveloppe imaginaire, il vient

$$R = \frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{p + q};$$

mais la formule

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

donnerait toujours pour R la même valeur $r + r'\sqrt{-1}$, au même point, quels que fussent les axes rectangulaires auxquels le lieu fût rapporté; on peut donc poser, en supposant les axes rectangulaires, l'axe des y parallèle aux cordes réelles de la conjuguée et $\frac{d^2y}{dx^2} = p + q\sqrt{-1}$, au point considéré, avec $\frac{dy}{dx} = m$

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{p + q\sqrt{-1}},$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{r(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + r'^2} \qquad \text{et} \qquad q = -r' \frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + r'^2}.$$

et, par suite,

$$p + q = \frac{(r - r')(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + r'^2},$$

d'où

$$R = \frac{r^2 + r'^2}{r - r'}.$$

Théorème. — *La développée de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu plan est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la développée du lieu.*

Cette relation remarquable entre les deux enveloppes se démontre de la manière suivante :

Soient $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ les coordonnées imaginaires d'un point $x_1 = \alpha + \beta$, $y_1 = \alpha' + \beta'$ de l'enveloppe imaginaire d'un lieu $f(X, Y) = 0$; m la valeur réelle de $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ en ce point et $\frac{\beta'}{\beta} = c$: le faisceau

$$Y - y = m(X - x)$$

ou

$$Y = mX + \alpha' + \beta'\sqrt{-1} - m(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

des tangentes au lieu $f(X, Y) = 0$, au point

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

se réduira à la seule droite

$$Y = mX + \alpha' - m\alpha + \beta' - m\beta,$$

tangente à l'enveloppe imaginaire au point

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta';$$

d'un autre côté, le faisceau

$$Y - y = -\frac{1}{m}(X - x)$$

ou

$$Y = -\frac{1}{m}X + \alpha' + \beta'\sqrt{-1} + \frac{1}{m}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

se réduira à la seule droite

$$Y = -\frac{1}{m}X + \alpha' + \beta' + \frac{1}{m}(\alpha + \beta),$$

et cette droite sera normale à l'enveloppe imaginaire au point considéré, c'est-à-dire sera tangente à la développée de l'enveloppe imaginaire.

Ainsi

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x)$$

sera l'équation générale en coordonnées imaginaires des tangentes à la développée de l'enveloppe imaginaire; d'un autre côté

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x),$$

où x et y seraient réels, serait l'équation générale des tangentes à la développée de la courbe réelle.

Mais, dans les deux cas, $y + \frac{1}{\frac{dy}{dx}}x$ sera la même fonction de x, ou de m, qui dépend de x.

Les deux développées seront donc respectivement les enveloppes de systèmes de droites, tels que

$$Y = mX + \varphi(m) \pm \sqrt{\psi(m)}$$

et

$$Y = mX + \varphi(m) \pm \sqrt{-\psi(m)},$$

c'est-à-dire que chacune d'elles sera l'enveloppe imaginaire des conjuguées de l'autre. (*A suivre.*)