NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Sur le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points d'un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 98-100

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__98_1>

SUR LE LIEU DES FOYERS DES CONIQUES QUI PASSENT PAR QUATRE POINTS D'UN CERCLE;

PAR M. H. FAURE,
Chef d'escadron d'Artillerie en retraite.

M. Salmon, dans son *Traité de Géométrie analytique* (*Courbes planes*), démontre, d'après le Dr Hart, qu'il existe deux cubiques circulaires ayant pour foyers quatre points A, B, C, D d'un cercle et que ces deux cubiques constituent le lieu de l'intersection de deux coniques semblables dont les foyers sont respectivement A et B, C et D (p. 353). D'autre part, M. Salmon (*Sections coniques*, p. 301) montre que le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points est une courbe du sixième ordre, qui se décompose en deux autres qui sont respectivement du troisième ordre, lorsque les quatre points sont sur un cercle.

Je ne crois pas que l'on ait remarqué que ces deux courbes du troisième ordre sont précisément les deux cubiques circulaires du Dr Hart. En voici une démonstration.

Soit F le foyer d'une *ellipse* passant par les quatre points A, B, C, D, d'après les expressions connues des rayons vecteurs,

$$\mathrm{FA} = a - \frac{cx_1}{a}, \qquad \mathrm{FB} = a - \frac{cx_2}{a};$$

d'où

$$\mathrm{FA} - \mathrm{FB} = \frac{c}{a}(x_2 - x_1)$$

et

$$\left(\frac{\mathrm{FA} - \mathrm{FB}}{\mathrm{AB}}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left[\frac{1}{\left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 + 1}\right].$$

Dans cette relation, x_1, y_1, x_2, y_2 sont les coordonnées des points A, B, l'ellipse étant rapportée à ses axes.

On aurait de même, x_3, y_3, x_4, y_4 étant les coordonnées des points C et D,

$$\left(\frac{\mathrm{FC} - \mathrm{FD}}{\mathrm{CD}}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left[\frac{1}{\left(\dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}\right)^2 + 1}\right].$$

Si les quatre points A, B, C, D sont sur un cercle, les cordes AB, CD sont également inclinées sur les axes; par suite,

$$\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 = \left(\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}\right)^2;$$

par conséquent,

$$\frac{\text{FA} - \text{FB}}{\text{AB}} = \pm \frac{\text{FC} - \text{FD}}{\text{CD}}.$$

Lorsque la conique est une *hyperbole* et que les quatre points A, B, C, D sont sur la même branche, on a la même relation; mais, si, les points A et C étant sur une branche, les points B et D sont sur l'autre, on a

$$\frac{\text{FA} + \text{FB}}{\text{AB}} = \frac{\text{FC} + \text{FD}}{\text{CD}}.$$

Dans ce cas, en effet, on a, par exemple,

$$\text{FA} = -a + \frac{cx_1}{a}, \qquad \text{FB} = a - \frac{cx_2}{a};$$

d'où

$$\text{FA} + \text{FB} = \frac{c}{a}(x_1 - x_2)$$

et de même

$$\text{FC} + \text{FD} = \frac{c}{a}(x_3 - x_4), \qquad \ldots.$$

On peut donc énoncer ce théorème :

Le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points A, B, C, D *d'un cercle est aussi le lieu de l'intersection de deux coniques semblables ayant respectivement pour foyers les points* A *et* B, C *et* D, *c'est-à-dire qu'il coïncide avec les deux cubiques circulaires qui ont pour foyers les points* A, B, C, D.