CH. BIEHLER

Sur les surfaces du deuxième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 573-585

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__573_1>

SUR LES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ;

PAR M. CH. BIEHLER.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation générale du second degré à trois variables représente une surface du second ordre d'une nature déterminée.

(1) N° 66 de notre premier Mémoire (*Nouvelles Annales*, 1885; p. 121).

I. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cône.

Considérons l'invariant de la fonction homogène du second degré à quatre variables x, y, z, t

$$\begin{aligned}F(x,y,z,t) &= Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &\quad + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2,\end{aligned}$$

à savoir

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

On a identiquement

$$\Delta t = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \frac{1}{2}F'_x \\ B'' & A' & B & \frac{1}{2}F'_y \\ B' & B & A'' & \frac{1}{2}F'_z \\ C & C' & C'' & \frac{1}{2}F'_t \end{vmatrix}$$

et, par suite,

$$\Delta t^2 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \frac{1}{2}F'_x \\ B'' & A' & B & \frac{1}{2}F'_y \\ B' & B & A'' & \frac{1}{2}F'_z \\ \frac{1}{2}F'_x & \frac{1}{2}F'_y & \frac{1}{2}F'_z & F(x,y,z,t) \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait, dans cette identité, $t=1$, $F(x,y,z,t)$ devient le premier membre de l'équation de la surface que nous désignerons simplement par F, et, si l'on désigne, pour abréger, par X, Y, Z ce que deviennent les demi-dérivées de F par rapport à x, y, z, l'identité précédente devient

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & X \\ B'' & A' & B & Y \\ B' & B & A'' & Z \\ X & Y & Z & F \end{vmatrix}.$$

La surface conique du second ordre est définie par la condition que son centre se trouve sur la surface. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre; pour ces valeurs de x, y, z, on a

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad F = 0;$$

le second membre de l'identité précédente est nul pour ces valeurs : on a donc

$$\Delta = 0.$$

La condition $\Delta = 0$ est donc nécessaire.

Cette condition est aussi suffisante; car, si elle est remplie, on a, pour toutes les valeurs de x, y, z,

$$0 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & X \\ B'' & A' & B & Y \\ B' & B & A'' & Z \\ X & Y & Z & F \end{vmatrix};$$

on en déduit

$$\delta F = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & X \\ B'' & A' & B & Y \\ B' & B & A'' & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix},$$

δ désignant le déterminant du troisième ordre

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

que nous supposons différent de zéro.

F est alors une fonction homogène et du second degré des fonctions linéaires X, Y, Z, et, comme les plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ se coupent en un point unique, l'équation $F = 0$ représente un cône.

II. — Conditions pour que l'équation générale du second degré représente un cylindre.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation générale du second degré représente un cylindre sont

$$\Delta = 0, \qquad \delta = 0.$$

Elles sont nécessaires; car, si l'équation $F = 0$ représente un cylindre, la surface a une ligne de centres; par suite, il existe une relation linéaire et homogène entre les trois dérivées de F par rapport à x, y, z

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0;$$

on a donc, entre les quantités λ, μ, ν qui ne sont pas toutes nulles, les quatre relations

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} A\,\lambda + B''\mu + B'\,\nu &= 0, \\ B''\lambda + A'\,\mu + B\,\nu &= 0, \\ B'\lambda + B\,\mu + A''\nu &= 0, \\ C\,\lambda + C'\,\mu + C''\nu &= 0; \end{aligned} \right.$$

par suite, les quatre déterminants du troisième ordre formés avec les coefficients de ces équations prises trois à trois sont nuls.

Nous les désignerons par δ, δ_1, δ_2, δ_3; δ étant l'invariant de la fonction homogène des trois variables x, y, z qui figure dans F et δ_1, δ_2, δ_3 les caractéristiques du troisième ordre des équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

Si la surface est un cylindre, on a donc

$$\delta = 0, \qquad \delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0, \qquad \delta_3 = 0.$$

Or δ, δ_1, δ_2, δ_3 sont les coefficients de D, C'', C', C dans le développement de Δ suivant les éléments de la dernière colonne; Δ est donc nul; par suite, les conditions $\Delta = 0$, $\delta = 0$ sont nécessaires.

Ces conditions sont suffisantes.

En effet, des relations $\Delta = 0$, $\delta = 0$ on déduit

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction homogène et du second degré par rapport à C, C', C'' et de la forme

$$\alpha C^2 + \alpha' C'^2 + \alpha'' C''^2 + 2\beta C'' C' + 2\beta' C C'' + 2\beta'' C' C = 0;$$

les coefficients α, α', α'', β, β', β'' sont les éléments du déterminant adjoint de δ. Or, par hypothèse, $\delta = 0$; par suite, les mineurs du second ordre du déterminant adjoint sont tous nuls; on a donc

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' - \beta''^2 &= 0, & \alpha\beta - \beta'\beta'' &= 0, \\ \alpha'\alpha'' - \beta^2 &= 0, & \alpha'\beta' - \beta''\beta &= 0, \\ \alpha''\alpha - \beta'^2 &= 0, & \alpha''\beta'' - \beta\beta' &= 0; \end{aligned}$$

ces mineurs étant ceux de l'invariant de la fonction homogène en C, C', C'', il s'ensuit que cette fonction homogène est un carré parfait.

Cette fonction est, par suite, le carré de l'une quelconque de ses dérivées par rapport à C, C', C''; la fonction étant nulle, les trois dérivées sont nulles; on a donc

$$\begin{aligned} \alpha\, C + \beta'' C' + \beta' C'' &= 0, \\ \beta'' C + \alpha' C' + \beta\, C'' &= 0, \\ \beta' C + \beta\, C' + \alpha'' C'' &= 0. \end{aligned}$$

Ces trois équations ne sont autres que $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$; les quatre équations (α) sont donc satisfaites pour des valeurs de λ, μ, ν, non toutes nulles; par suite, il existe, entre les dérivées X, Y, Z, la relation identique

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0;$$

la surface est donc un cylindre.

III. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux plans.

Il faut exprimer d'abord que la surface est un cylindre, d'où

$$\Delta = 0, \qquad \delta = 0;$$

il faut ensuite que les traces de ce cylindre sur chacun des trois plans de coordonnées soient un système de deux droites.

On obtient ainsi les trois relations

$$\begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B' & C \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & D \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} = 0,$$

ce que l'on peut écrire d'une manière plus simple

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0.$$

Les conditions

$$\Delta = 0, \qquad \delta = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0$$

sont évidemment suffisantes pour que l'équation $F = 0$ représente un système de deux plans.

Il est aisé de montrer que ces conditions se ramènent à trois équations distinctes

$$\Delta = 0, \qquad \delta = 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0.$$

Pour le faire voir, nous allons établir que, sous la condition $\Delta = 0$, on a, entre les mineurs de Δ, les relations

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A}\,\frac{\partial\Delta}{\partial A'} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial B''}\right)^2 = 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial A'}\,\frac{\partial\Delta}{\partial A''} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial B}\right)^2 = 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial A''}\,\frac{\partial\Delta}{\partial A} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial B'}\right)^2 = 0,$$

qui montrent que les trois quantités $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$ sont de même signe et, par suite, sont nulles toutes les trois, lorsque leur somme est nulle.

Soit Θ le déterminant adjoint du déterminant Δ, c'est-à-dire le déterminant dont les éléments sont $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial D}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial B}$, ..., que nous désignerons, pour abréger, par a, a', a'', d, b, b', b'', c, c', c''; on aura

$$\Theta = \begin{vmatrix} a & b' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ b' & b & a'' & c'' \\ c & c' & c' & d \end{vmatrix}.$$

En faisant le produit de Θ par le déterminant Θ_1,

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix},$$

il viendra

$$\Theta\Theta_1 = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & c \\ b'' & a' & b & c' \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix};$$

comme $\Theta = \Delta^3$, l'égalité précédente devient

$$\Delta^3\Theta_1 = (aa' - b''^2)\Delta^2$$

ou

$$\Delta\Theta_1 = (aa' - b''^2).$$

Si donc $\Delta = 0$, on aura

$$aa' - b'^2 = 0.$$

Or

$$a = \frac{\partial\Delta}{\partial A}, \qquad a' = \frac{\partial\Delta}{\partial A'}, \qquad b'' = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial B''};$$

par suite,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A}\,\frac{\partial\Delta}{\partial A'} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial B''}\right)^2 = 0.$$

On établirait de la même manière les deux autres relations, ce qui montre que $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$ sont de même signe, et, par suite, si leur somme est nulle, chacune de ces quantités est nulle.

Toutefois, pour affirmer que les trois quantités $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$ sont de même signe, il faut que les trois mineurs

$$\frac{\partial\Delta}{\partial B}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial B'}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial B'}$$

ne soient pas nuls à la fois; si on les suppose nuls, deux des quantités $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A'}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial A''}$ sont nulles, et, par suite, la condition

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0$$

entraîne la nullité des trois quantités

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial A'}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial A''}.$$

Remarquons que les conditions précédentes entraînent la nullité de tous les mineurs du troisième ordre de Δ.

IV. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un paraboloïde.

On sait que cette condition est

$$\delta = 0.$$

Nous ne nous y arrêterons pas.

V. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cylindre parabolique.

Il faut et il suffit, pour cela, que la fonction homogène du second degré aux trois variables x, y, z qui figure dans F soit un carré parfait. On sait que les mineurs du second ordre de l'invariant δ sont nuls dans ce cas, et ces conditions sont suffisantes.

Il est aisé de montrer que les six égalités qu'on obtient ainsi peuvent être remplacées par

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial A} + \frac{\partial\delta}{\partial A'} + \frac{\partial\delta}{\partial A''} = 0.$$

On a en effet les identités

$$\frac{\partial\delta}{\partial A}\,\frac{\partial\delta}{\partial A'} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\delta}{\partial B''}\right)^2 = A''\delta,$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial A'}\,\frac{\partial\delta}{\partial A''} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\delta}{\partial B}\right)^2 = A\delta,$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial A''}\,\frac{\partial\delta}{\partial A} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\delta}{\partial B'}\right)^2 = A'\delta,$$

qui nous montrent que les conditions

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{\partial \delta}{\partial A'} + \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0$$

entraînent

$$\frac{\partial \delta}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0,$$

avec

$$\frac{\partial \delta}{\partial B} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial B'} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial B''} = 0.$$

Les deux équations

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{\partial \delta}{\partial A'} + \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0$$

équivalent à trois conditions distinctes entre les coefficients.

VI. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux plans parallèles.

Il faut d'abord que

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{\partial \delta}{\partial A'} + \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0,$$

car l'équation d'un système de deux plans parallèles est nécessairement de la forme

$$(ax + by + cz)^2 + 2\lambda(ax + by + cz) + \mu = 0,$$

L'ensemble homogène des termes du second degré est donc un carré parfait. Il faut exprimer de plus que les traces de la surface sur les plans de coordonnées sont un système de deux droites ; il faut donc ajouter aux conditions précédentes les conditions nouvelles

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0.$$

qui entraînent

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0.$$

Il reste à démontrer que les conditions

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial A} + \frac{\partial\delta}{\partial A'} + \frac{\partial\delta}{\partial A''} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0,$$

sont suffisantes. Cela est évident, car si les deux premières équations sont satisfaites, la surface est un cylindre parabolique; ces conditions entraînent $\Delta = 0$; par suite, si

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0,$$

les trois déterminants

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A}, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial A'}, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial A''}$$

sont nuls; les traces de la surface sur les trois plans de coordonnées sont donc des systèmes de droites parallèles. La directrice du cylindre parabolique est alors un systeme de deux droites parallèles et le cylindre se réduit à deux plans parallèles.

Les trois équations précédentes équivalent à cinq conditions distinctes.

VII. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un plan double.

Il faut d'abord que les trois équations

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial A} + \frac{\partial\delta}{\partial A'} + \frac{\partial\delta}{\partial A''} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} + \frac{\partial\Delta}{\partial A'} + \frac{\partial\Delta}{\partial A''} = 0$$

soient satisfaites; il faut ensuite exprimer que les traces de la surface sur les trois plans de coordonnées sont des droites doubles.

Il est aisé de voir qu'aux conditions précédentes il faut ajouter

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A\, \partial A'} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'\, \partial A''}\, \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A''\, \partial A} = 0.$$

Pour le démontrer, cherchons la trace de la surface sur le plan des xy; son équation est

$$A x^2 + A' y^2 + 2 B'' xy + 2 C x + 2 C' y + D = 0:$$

il faut exprimer que cette équation représente une droite double.

Puisque nous avons déjà $\frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0$, cette équation représente un système de deux droites; ces deux droites sont parallèles puisque $\frac{\partial \Delta}{\partial A''}$ est aussi nul; il faut enfin que les traces de ces droites sur les axes soient confondues pour que les deux droites soient elles-mêmes confondues; on a ainsi

$$C^2 - AD = 0, \qquad C'^2 - A'D = 0,$$

les égalités ne sont autres que

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A''\, \partial A'} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A''\, \partial A} = 0.$$

Mais si la somme

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A''\, \partial A'} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A''\, \partial A}$$

est nulle, avec

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0,$$

chacune de ces quantités est nulle.

Cela résulte en effet de l'identité

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A} - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial B''}\right)^2 = D \frac{\partial \Delta}{\partial A''};$$

le second membre étant nul, les deux quantités

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'} \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A}$$

sont de même signe, et par suite, si leur somme est nulle, chacune de ces quantités est nulle, et cela a lieu encore si $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial B''}$ est nul.

Comme on en dirait autant des traces de la surface sur les autres plans de coordonnées, les trois déterminants

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'} \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A \partial A''} \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A' \partial A}$$

sont de même signe et, si leur somme est nulle, chacun d'eux est nul ; la propriété précédente subsiste encore si, dans la démonstration, on suppose nuls les déterminants analogues à $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial B''}$; la condition

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A'} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A \partial A''} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A' \partial A} = 0$$

entraîne donc la nullité des trois déterminants.

Les conditions précédentes sont évidemment suffisantes.

Pour que l'équation générale du second degré représente un plan double, il faut et il suffit donc que l'on ait

$$\delta = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial A} + \frac{\partial \delta}{\partial A'} + \frac{\partial \delta}{\partial A''} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} + \frac{\partial \Delta}{\partial A'} + \frac{\partial \Delta}{\partial A''} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial A \partial A'} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A' \partial A''} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial A'' \partial A} = 0.$$

Ces équations équivalent à six conditions distinctes.