NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BALITRAND

Sur les cubiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 520-525

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__520_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LES CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. BALITRAND,
Élève de l'École Polytechnique.

Nous nous proposons d'appliquer à l'étude des groupes de points sur une cubique gauche une méthode identique à celle que M. Appell a appliquée dans le cas des coniques (*Nouvelles Annales*, janvier 1889); et d'en déduire quelques conséquences pour la théorie de ces courbes et pour celles des courbes planes du troisième ordre ayant un point double.

Nous commencerons par donner une démonstration très simple du théorème suivant :

Étant donnée une cubique gauche, par tout point de l'espace, on peut mener une droite qui rencontre cette courbe en deux points réels ou imaginaires conjugués.

Soit P le point donné. La cubique considérée est à l'intersection de deux surfaces du second degré ayant une génératrice commune. Les plans polaires du point P, par rapport à ces deux surfaces, se coupent suivant une droite, et le plan mené par cette droite et le point P coupe ces deux surfaces suivant deux coniques dont les quatre points d'intersection sont réels, ou dont deux sont réels et deux imaginaires conjugués. Le point P, réel par hypothèse, a même polaire par rapport à ces deux coniques. Donc il est à l'intersection de deux sécantes communes réelles; et l'une de ces sécantes rencontrant la cubique gauche en deux points réels ou imaginaires conjugués, le théorème est démontré.

Cela posé, rappelons que les cubiques gauches sont des courbes unicursales et proposons-nous de trouver la relation qui lie les paramètres de trois points de la cubique situés dans un plan variable passant par un point fixe.

Soient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta} = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)},\\ y &= \frac{a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta} = \frac{f_2(t)}{\varphi(t)},\\ z &= \frac{a_3 t^3 + b_3 t^2 + c_3 t + d_3}{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta} = \frac{f_3(t)}{\varphi(t)}\end{aligned}\right.$$

les équations de la cubique.

Soient P le point fixe et a et b les valeurs du paramètre t pour les points A et B en ligne droite avec P.

Soient

$$R = 0, \qquad S = 0$$

les équations de la droite PAB.

$Q = 0$ étant l'équation d'un plan passant par le point P, l'équation

$$Q + \lambda R + \mu S = 0$$

est l'équation la plus générale des plans passant par ce point.

Dans l'expression $Q + \lambda R + \mu S$, je substitue à x, y, z leurs valeurs (1) en t, et je décompose le numérateur en facteurs du premier degré; j'obtiens ainsi l'identité

$$Q + \lambda R + \mu S \equiv k \frac{(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)}{\varphi(t)},$$

où k est indépendant de t.

Dans cette identité, je donne successivement à t les valeurs $t = a$, $t = b$, et je désigne par Q_1 et Q_2 ce que devient Q pour ces valeurs; j'ai

$$Q_1 = k \frac{(a - t_1)(a - t_2)(a - t_3)}{\varphi(a)},$$

$$Q_2 = k \frac{(b - t_1)(b - t_2)(b - t_3)}{\varphi(b)};$$

en divisant,

$$\frac{\varphi(a) Q_1}{\varphi(b) Q_2} = \frac{(t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a)}{(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b)}$$

ou

$$(2) \qquad \frac{(t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a)}{(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b)} = C,$$

C désignant une constante.

Telle est la relation cherchée. Nous allons indiquer très rapidement les formes sous lesquelles on peut la mettre et les théorèmes qui en découlent. (Pour les détails, se reporter à l'article de M. Appell.)

1° *a et b sont réels.* — Par la substitution

$$\frac{t - a}{t - b} = \theta:$$

la relation (2) devient

$$(3) \qquad \theta_1 \theta_2 \theta_3 = C.$$

2° *a et b sont imaginaires conjugués*

$$a = \alpha + \beta i, \quad b = \alpha - \beta i, \qquad C = \cos\omega + i\sin\omega.$$

Pour simplifier la relation (2) et n'y introduire que des éléments réels, nous poserons

$$\frac{\alpha - t}{\beta} = \cot\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\omega}{8}\right);$$

la relation (2) deviendra

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2k\pi.$$

3° $a = b$. — La droite PAB est tangente à la cubique. On trouve une relation de la forme

$$\frac{1}{a - t_1} + \frac{1}{a - t_2} + \frac{1}{a - t_3} = h;$$

d'où, en posant

$$\frac{1}{a - t} = s + \frac{h}{3},$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0.$$

De ces relations résultent les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Étant donnée une cubique gauche, par un point* P (*non situé sur une de ses tangentes*) *on peut mener trois plans osculateurs à la courbe. Les points de contact sont réels si les points* A *et* B *sont imaginaires; si les points* A *et* B *sont réels, un point de contact est réel et les deux autres sont imaginaires conjugués.*

Théorème II. — *Les points de contact des plans osculateurs et le point d'où on les mène sont dans un même plan.*

Théorème III. — *Par le point* P *et un deuxième point pris sur la cubique, c'est-à-dire par une droite* *qui rencontre la cubique, on peut mener deux plans tangents à cette courbe; les points de contact ne sont jamais dans un même plan avec la droite intersection des plans tangents.*

Théorème IV. — *L'enveloppe des traces des plans osculateurs à la cubique gauche sur un de ses plans osculateurs est une conique.*

En effet, par un point quelconque d'un plan osculateur à la cubique passent deux plans osculateurs seulement, c'est-à-dire deux tangentes à la courbe enveloppe des traces des plans osculateurs à la cubique. Cette courbe est donc une conique.

Théorème V. — *Les plans osculateurs à la cubique, aux points où elle est rencontrée par un plan, se coupent en un point situé dans ce plan.*

Ce théorème est une conséquence presque immédiate du théorème I.

D'après le théorème préliminaire, la perspective d'une cubique gauche est une courbe plane du troisième degré ayant un point double.

D'ailleurs, étant donné un point S et une cubique plane à point double, on peut, d'une infinité de façons, considérer celle-ci comme la perspective d'une cubique gauche, le point de vue étant au point S. Il suffit, en effet, de tracer une conique qui passe au point double et y touche une des tangentes à la cubique, et de la prendre comme directrice d'un cône dont le sommet S' est sur la droite qui joint le point S au point double. Les cônes S et S' ont en commun la génératrice triple SS'. Le reste de l'intersection est une cubique gauche qui se projette suivant la cubique plane considérée.

Dès lors, des propriétés des cubiques gauches on peut déduire les propriétés des cubiques planes unicursales, et réciproquement.

Commençons par rappeler que, si le sommet du cône projetant une courbe gauche est dans l'un des plans osculateurs de la courbe, la projection présente un point d'inflexion correspondant au point de contact du plan osculateur.

Le théorème I nous donne alors :

Une cubique plane à point double présente trois points d'inflexion en ligne droite. Parmi les trois points d'inflexion, deux sont imaginaires conjugués et un réel, si les tangentes du point double sont imaginaires, c'est-à-dire si ce dernier est un point isolé.

Le théorème III nous montre que, par un point d'une cubique plane unicursale, on peut mener deux tangentes à la courbe.

Inversement, ce théorème bien connu, que les tangentes à une cubique, en trois points en ligne droite, rencontrent la courbe en trois points également en ligne droite, nous donne, pour les cubiques gauches, le résultat suivant :

Par un point M, *on mène trois plans tangents à une cubique gauche, tels que les points de contact soient dans un plan passant par* M; *les troisièmes points d'intersection de ces plans avec la courbe et le point* M *sont dans un même plan.*