P. APPELL

Sur les points d'intersection d'une conique fixe avec une conique mobile passant par deux points fixes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 48-56

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__48_1>

SUR LES POINTS D'INTERSECTION D'UNE CONIQUE FIXE AVEC UNE CONIQUE MOBILE PASSANT PAR DEUX POINTS FIXES;

PAR M. P. APPELL.

Nous nous proposons d'appliquer à un cas élémentaire les méthodes indiquées par Clebsch [1] pour l'étude des groupes de points sur une courbe unicursale.

Soit une conique fixe S supposée réelle et soient

$$(1) \qquad x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{g(t)}{\varphi(t)}$$

les expressions des coordonnées d'un point de cette conique en fonction rationnelle d'un paramètre t, $f(t)$, $g(t)$ et $\varphi(t)$ désignant des trinômes du second degré en t. Pour préciser, on peut supposer que le paramètre t est le coefficient angulaire de la droite joignant le point (x, y) de la conique S à un point réel fixe sur cette co-

[1] Voir *Leçons sur la Géometrie*, par CLEBSCH; recueillies et complétées par LINDEMANN, traduites par BENOIST, tome III. Gauthier-Villars, 1883.

nique : on voit alors qu'à chaque point (x, y) correspond une seule valeur de t, que si ce point est réel la valeur de t l'est aussi, et réciproquement.

Considérons maintenant deux points fixes P et Q réels ou imaginaires conjugués, non situés sur la conique S et définis par l'intersection d'une droite fixe

$$ux + vy + w = 0,$$

avec une conique fixe ayant pour équation

$$F(x, y) = 0.$$

L'équation générale des coniques Σ passant par les deux points fixes P et Q est

$$(2) \qquad F(x, y) + (ux + vy + w)(\lambda x + \mu y + \nu) = 0,$$

avec trois coefficients variables λ, μ, ν. Ces coniques variables Σ coupent la conique fixe S en quatre points parmi lesquels trois peuvent être choisis arbitrairement; le quatrième point d'intersection est alors déterminé et est unique. Appelons t_1, t_2, t_3, t_4 les valeurs du paramètre t correspondant à ces quatre points d'intersection : ces valeurs seront liées par une relation algébrique déterminant l'une d'elles dès que les trois autres seront connues. C'est cette relation que nous allons former.

Supposons d'abord que la droite PQ ne soit pas tangente à la conique fixe S : elle coupera cette conique en deux points, réels ou imaginaires, correspondant aux valeurs $t = a$ et $t = b$ du paramètre t, fournies par l'équation

$$ux + vy + w = 0,$$

dans laquelle on remplacerait x et y par les expressions (1) : nous appellerons $x_1 y_1$ et $x_2 y_2$ les coordonnées de ces points A et B. Pour trouver les valeurs de t correspondant aux quatre points d'intersection de la conique variable Σ avec la conique fixe S, il faut substituer dans l'équation (2) de Σ les expressions (1) de x et y

$$(1) \qquad x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{g(t)}{\varphi(t)};$$

l'équation (2) devient alors, après qu'on a réduit tous ses termes au dénominateur commun $\varphi^2(t)$, une équation du quatrième degré admettant les racines cherchées t_1, t_2, t_3, t_4. On aura donc, en décomposant le numérateur de cette équation en facteurs du premier degré, l'identité

$$\begin{aligned} &F(x,y) + (ux + vy + w)(\lambda x + \mu y + \nu) \\ &= K\frac{(t_1 - t)(t_2 - t)(t_3 - t)(t_4 - t)}{\varphi^2(t)}, \end{aligned}$$

où K est une constante qui ne dépend pas de t, mais qui dépend de λ, μ, ν. Si, dans cette identité, on fait $t = a$, les quantités x et y deviennent les coordonnées x_1 et y_1 du point A, $(ux + vg + w)$ s'annule, et l'on a

$$F(x_1, y_1)\varphi^2(a) = K(t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a)(t_4 - a):$$

de même, en faisant $t = b$, on a

$$F(x_2, y_2)\varphi^2(b) = K(t_1 - b)(t_2 - b)(t_3 - b)(t_4 - b).$$

Divisant ces deux équations membre à membre pour éliminer K, on a la relation cherchée

$$(3) \qquad \frac{t_1 - a}{t_1 - b}\,\frac{t_2 - a}{t_2 - b}\,\frac{t_3 - a}{t_3 - b}\,\frac{t_4 - a}{t_4 - b} = C,$$

où le second membre C est une constante ayant pour valeur

$$(4) \qquad C = \frac{F(x_1, y_1)\varphi^2(a)}{F(x_2, y_2)\varphi^2(b)}.$$

On voit, comme nous l'avions dit *a priori*, que, t_1, t_2, t_3 étant choisis arbitrairement, cette relation (3) donne une seule valeur pour t_4. Examinons maintenant les divers cas qui peuvent se présenter et tirons quelques conséquences de cette relation (3).

1° *Les points* A *et* B *sont réels.* — Dans ce cas, la constante C est réelle; elle est positive si $F(x_1, y_1)$ et $F(x_2, y_2)$ sont de mêmes signes, c'est-à-dire si les points A et B sont tous deux à l'intérieur ou tous deux à l'extérieur de la conique $F(x, y) = 0$; elle est négative dans le cas contraire. Nous simplifierons la forme de la relation (3) en faisant un changement de paramètre et posant

$$\frac{t-a}{t-b} = \theta,$$

où θ désigne une nouvelle variable destinée à remplacer t. A chaque valeur de θ répondent une valeur de t et, par suite, un point de la conique S, et réciproquement; si θ est réel, t l'est aussi, et réciproquement. Si l'on appelle θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 les quatre valeurs de θ correspondant aux quatre points d'intersection de Σ avec S, on voit que la relation (3) prendra la forme simple

$$(5) \qquad \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 = C.$$

Coniques Σ *surosculatrices à* S. — Pour qu'une conique Σ soit surosculatrice à S, il faut et il suffit que les quatre points d'intersection soient confondus. Appelant θ la valeur du paramètre qui correspond au point de surosculation, on aura donc, d'après (5),

$$(6) \qquad \theta^4 = C:$$

cette équation a deux racines réelles ou n'en a aucune suivant que C est positif ou négatif. Dans la première hypothèse, il existe deux coniques Σ surosculatrices réelles; dans la seconde, il n'en existe pas. Les quatre points de surosculation réels ou imaginaires ne sont jamais sur une conique Σ, car le produit des quatre racines de l'équation (6) est égal à $-C$.

Mener par un point θ_1 *de la conique* S *des coniques* Σ *osculatrices à* S. — Soit θ la valeur du paramètre correspondant au point d'osculation, la conique Σ osculatrice au point θ coupera S au point donné θ_1 et en trois points confondus avec θ; on aura donc, d'après (5),

$$\theta_1 \theta^3 = C, \tag{7}$$

équation en θ qui a une seule racine réelle θ' et deux imaginaires θ'' et θ'''. On ne peut donc mener par un point θ_1 de S qu'une conique Σ réelle osculatrice à S. Le point θ_1 et les trois points d'osculation réels ou imaginaires θ', θ'', θ''' sont sur une conique Σ, car on a

$$\theta_1 \theta' \theta'' \theta''' = C.$$

2° *Les points* A *et* B *sont imaginaires conjugués.* — Alors les quantités $F(x_1, y_1)\varphi^2(a)$ et $F(x_2, y_2)\varphi^2(b)$ sont imaginaires conjuguées; leur quotient C est une constante imaginaire de module 1,

$$C = \cos\omega + i\sin\omega.$$

Les constantes a et b étant imaginaires conjuguées, on a

$$a = \alpha + i\beta, \qquad b = \alpha - i\beta.$$

Pour simplifier la relation (3) et n'y introduire que des éléments réels, posons

$$\frac{\alpha - t}{\beta} = \cot\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\omega}{8}\right).$$

τ étant un nouveau paramètre que nous substituons à t. A chaque valeur de τ répond une seule valeur de t, mais à une valeur de t répondent une infinité de valeurs de τ différant les unes des autres par des multiples de 2π : en outre, si τ est réel, t l'est aussi, et réciproquement. Donc, à chaque valeur de τ correspond un seul point de la conique S; mais à un point de la conique correspondent une infinité de valeurs de τ différant les unes des autres par des multiples de 2π. Si nous appelons τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 des valeurs de τ correspondant aux quatre points t_1, t_2, t_3, t_4 d'intersection de la conique S avec une conique Σ, la relation (3) prendra la forme

$$\begin{aligned}&\cos(\tau_1 + t_2 + \tau_3 + \tau_4 + \omega)\\ &\quad + i \sin(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \omega) = \cos\omega + i\sin\omega;\end{aligned}$$

d'où

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 2k\pi, \tag{8}$$

k désignant un nombre entier quelconque.

Coniques Σ surosculatrices. — En appelant τ le paramètre du point de surosculation, on devra avoir

$$4\tau = 2k\pi;$$

d'où, pour τ_1, quatre valeurs obtenues en faisant successivement $k = 0, 1, 2, 3$,

$$\tau' = 0, \qquad \tau'' = \frac{\pi}{2}, \qquad \tau''' = \pi, \qquad \tau^{\text{IV}} = \frac{3\pi}{2};$$

les autres déterminations de l'entier k donnent pour τ des valeurs qui diffèrent de l'une des quatre précédentes par des multiples de 2π et qui, par suite, ne fournissent pas de nouveaux points de la courbe. Il y a donc quatre coniques Σ surosculatrices réelles; leurs points de contact ne sont jamais situés sur une conique Σ, car la somme $(\tau' + \tau'' + \tau''' + \tau^{\text{IV}})$ est un multiple *impair* de π.

Mener par un point τ_1 de la conique S *des coniques* Σ *osculatrices à* S. — Appelons τ le paramètre du point d'osculation, nous aurons

$$\tau_1 + 3\tau = 2k\pi,$$

d'où, en faisant $k = 0, 1, 2$, trois valeurs pour τ :

$$\tau' = -\frac{\tau_1}{3}, \qquad \tau'' = \frac{2\pi}{3} - \frac{\tau_1}{3}, \qquad \tau''' = \frac{4\pi}{3} - \frac{\tau_1}{3}.$$

Il y a donc trois coniques Σ osculatrices réelles; les points de contact et le point τ_1 sont sur une conique Σ; car on a

$$\tau' + \tau'' + \tau''' + \tau_1 = 2\pi.$$

3° Nous avons supposé, pour établir les résultats précédents, que la droite PQ n'est pas tangente à la conique S. Lorsque cette droite est tangente à S, les deux points A et B sont confondus, a devient égal à b, et l'équation

$$ux + vy + w = 0,$$

où l'on remplace x et y par leurs expressions (1) en fonction de t, admet la *racine double* $t = a$ qui annule aussi la dérivée

$$ux'_t + vy'_t.$$

Revenons alors à l'identité

$$\begin{aligned} & F(x, y) + (ux + vy + w)(\lambda x + \mu y + \nu) \\ & = K \frac{(t_1 - t)(t_2 - t)(t_3 - t)(t_4 - t)}{\varphi^2(t)}, \end{aligned}$$

et prenons les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à t. Nous aurons la nouvelle identité

$$\begin{aligned} & \frac{F'_x x'_t + F'_y y'_t + (ux'_t + vy'_t)(\lambda x + \mu y + \nu) + (ux + vy + w)(\lambda x'_t + \mu y'_t)}{F(x, y) + (ux + vy + w)(\lambda x + \mu y + \nu)} \\ & = \frac{1}{-t_1} + \frac{1}{t - t_2} + \frac{1}{t - t_3} + \frac{1}{t - t_4} - 2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}; \end{aligned}$$

faisons dans cette identité $t = a$ et rappelons-nous que $(ux + vy + w)$ et $(ux'_t + vy'_s)$ s'annulent pour $t = a$, nous aurons la relation cherchée

$$(9) \qquad \frac{1}{a - t_1} + \frac{1}{a - t_2} + \frac{1}{a - t_3} + \frac{1}{a - t_4} = h,$$

h désignant une constante dont il est inutile d'écrire l'expression. Si, pour simplifier, on change de paramètre en posant

$$\frac{1}{a - t} = s + \frac{h}{4},$$

s désignant un nouveau paramètre qui prend les valeurs s_1, s_2, s_3, s_4 aux quatre points d'intersection, la relation (9) devient

$$(10) \qquad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0.$$

Il n'y a plus alors qu'une conique Σ surosculatrice; son point de contact est $s = 0$. Par un point s_1 de S on ne peut plus mener qu'une conique Σ osculatrice à S; le point de contact est $-\frac{s_1}{3}$.

Exercices. — I. En un point M_1 de la conique S on mène une conique Σ osculatrice coupant la conique S en un autre point M_2; en M_2 on mène de nouveau une conique Σ osculatrice qui coupe S en un autre point M_3; ... et ainsi de suite. Calculer le paramètre du point M_n ainsi obtenu en fonction de paramètre du point M_1, en se plaçant successivement dans les trois cas examinés plus haut. Chercher si M_n peut coïncider avec M_1. Chercher si M_n tend vers une position limite quand n augmente indéfiniment.

II. Appliquer la méthode générale aux cas particuliers suivants, auxquels on pourrait toujours ramener les trois cas précédents par une projection conique :

1° S est une hyperbole $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ et les coniques Σ sont des cercles

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0,$$

ou des hyperboles équilatères asymptotes aux axes

$$xy + \lambda x + \mu y + \nu = 0;$$

2° La conique S est une ellipse et les coniques Σ des cercles;

3° La conique S est une parabole et les coniques Σ des cercles.

III. Former les relations qui lient les quatre valeurs du paramètre t correspondant aux points d'intersection d'une conique fixe S avec une conique variable T passant par trois points fixes ; trouver ensuite les coniques T bitangentes à la conique S.