T.-J STIELTJES

Sur un passage de la théorie analytique de la chaleur

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 472-478

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__472_0>

SUR UN PASSAGE DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

La méthode suivie par Fourier pour obtenir le développement

$$(A)\qquad 1 = a\cos x + b\cos 3x + c\cos 5x + d\cos 7x + \ldots$$

est très belle, mais elle manque absolument de rigueur, et l'on peut même s'étonner, au premier abord, qu'un tel procédé puisse conduire à un résultat exact.

Fourier pose $x = 0$ dans l'équation (A) et dans celles qu'on en déduit par des différentiations successives. Il obtient ainsi les relations

$$\begin{aligned}
1 &= a + b + c + d + \ldots,\\
0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + \ldots,\\
0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + \ldots,\\
0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

n de ces équations lui fournissent les n premiers coefficients en annulant tous ceux qui suivent, et, en prenant ensuite $n = \infty$, on constate que les valeurs obtenues pour $a, b, c, d, \ldots$ tendent vers des limites déterminées.

C'est ainsi qu'il obtient le résultat cherché

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots.$$

Nous nous proposons d'étudier de plus près cette méthode.

1. Il est clair que la détermination des $a, b, c, d, \ldots$ d'après Fourier revient à ceci :

Déterminer les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de manière que le développement de

$$\varphi_n(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \ldots + a_n \cos(2n-1)x$$

soit de cette forme

$$\varphi_n(x) = 1 + k_n x^{2n} + k_{n+1} x^{2n+2} + \ldots.$$

Pour obtenir $\varphi_n(x)$ et en même temps une expression simple de $1 - \varphi_n(x)$, nous remarquons que l'identité

$$(2i \sin x)^{2n-1} = (e^{ix} - e^{-ix})^{2n-1}$$

donne facilement, en développant le second membre,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} (\sin x)^{2n-1} = A_n \Big[&\sin x - \frac{n-1}{n+1} \sin 3x \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \sin 5x \\ &- \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sin 7x - \ldots \Big], \end{aligned}\right.$$

$$A_n = \frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{4.6.8\ldots(2n)}.$$

On en conclut

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx \\ &= B_n - A_n \Big[\cos x - \frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n+1} \cos 3x \\ &\qquad + \frac{1}{5}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \cos 5x - \ldots \Big], \end{aligned}\right.$$

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n-1}\,dx = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}.$$

Or il est clair que le développement de

$$\int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx$$

commence par un terme en x^{2n} : donc on a nécessairement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi_n(x) = \frac{A_n}{B_n}\Big[&\cos x - \frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n+1}\cos 3x\\ &+\frac{1}{5}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}\cos 5x - \ldots\Big],\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad 1-\varphi_n(x) = \int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx : \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n-1}\,dx.$$

Fourier n'a pas donné explicitement l'expression de $\varphi_n(x)$, mais on peut la déduire facilement de ses formules et constater l'identité avec la formule (3). On a notamment

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{3^2.5^2.7^2\ldots(2n-1)^2}{(3^2-1)(5^2-1)(7^2-1)[(2n-1)^2-1]}$$

et il est facile de conclure, d'après la formule de Wallis,

$$(5)\qquad \lim \frac{A_n}{B_n} = \frac{4}{\pi}.$$

2. Supposons que x soit compris entre $\pm\frac{\pi}{2}$ (sans atteindre une de ces limites), la formule (4) permettra facilement de conclure

$$\lim[1-\varphi_n(x)] = 0, \qquad n=\infty.$$

En effet, soit

$$C_n = \int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx,$$

il est clair que

$$C_{n+1} < C_n \sin^2 x$$

et

$$B_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,B_n,$$

donc

$$\frac{1-\varphi_{n+1}(x)}{1-\varphi_n(x)} = \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}} : \frac{C_n}{B_n} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)\sin^2 x.$$

λ étant un nombre fixe compris entre $\sin^2 x$ et 1, le rapport

$$[1-\varphi_{n+1}(x)] : [1-\varphi_n(x)]$$

sera donc constamment inférieur à λ à partir d'une valeur suffisamment grande de n, d'où l'on conclut

$$(6)\qquad \lim[1-\varphi_n(x)] = 0, \qquad n=\infty.$$

On verra de la même façon que

$$(7)\qquad \lim \frac{1}{A_n}\int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx = 0.$$

Or on a

$$\frac{1}{A_n}\int_0^x (\sin x)^{2n-1}\,dx = \frac{B_n}{A_n} - \left(\cos x - \frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n+1}\cos 3x + \ldots\right)$$

et

$$\lim \frac{B_n}{A_n} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc, pour achever la démonstration de la formule

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots,$$

il suffira de faire voir qu'en posant

$$S = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots,$$

$$S' = \cos x - \frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n+1}\cos 3x + \frac{1}{5}\,\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}\cos 5x - \ldots,$$

on a

$$\lim(S-S') = 0, \qquad n=\infty.$$

3. Remarquons d'abord qu'en écrivant

$$S' = a_1\cos x - a_3\cos 3x + a_5\cos 5x - \ldots,$$

les coefficients a_1, a_3, a_5, ... sont positifs et vont en diminuant.

Soit, m étant un entier impair,

$$R_m = \frac{1}{m}\cos mx - \frac{1}{m+2}\cos(m+2)x + \ldots$$
$$\pm \frac{1}{m+2k}\cos(m+2k)x,$$
$$R'_m = a_m \cos mx - a_{m+2}\cos(m+2)x + \ldots$$
$$\pm a_{m+2k}\cos(m+2k)x.$$

On aura

$$\begin{aligned} 2R'_m \cos x = {} & a_m \cos(m-1)x \\ & +(a_m - a_{m+2})\cos(m+1)x \\ & -(a_{m+2} - a_{m+4})\cos(m+3)x \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \mp(a_{m+2k-2} - a_{m+2k})\cos(m+2k-1)x \\ & \pm a_{m+2k}\cos(m+2k+1)x; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut qu'en valeur absolue

$$|2R'_m \cos x| < a_m + (a_m - a_{m+2})$$
$$+(a_{m+2} - a_{m+4}) + \ldots + (a_{m+2k-2} - a_{m+2k}) + a_{m+2k},$$

(8) $$|R'_m| < \frac{a_m}{\cos x} < \frac{1}{m\cos x}$$

et de la même façon

(9) $$|R_m| < \frac{1}{m\cos x}.$$

Cette dernière relation montre que la série S est convergente.

4. Cela étant, soit ε un nombre positif donné aussi petit qu'on voudra. Il faut montrer qu'il est possible de trouver un entier N tel que, pour

$$n \geqq N,$$

on ait toujours

$$|S - S'| < \varepsilon.$$

Il est bien entendu qu'on suppose que x a une valeur fixe comprise entre $\pm\frac{\pi}{2}$.

Voici comment on peut trouver ce nombre N. Décomposons d'abord d'une manière quelconque ε en deux parties également positives :

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$$

et prenons un nombre entier impair m tel que

$$m > \frac{2}{\varepsilon'' \cos x}.$$

En écrivant alors

$$S = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots \pm \frac{1}{m-2}\cos(m-2)x \pm R_m,$$

$$S' = a_1 \cos x - a_3 \cos 3x + \ldots \pm a_{m-2}\cos(m-2)x \pm R'_m,$$

on aura, d'après les limitations (8) et (9),

$$|R_m| < \frac{1}{2}\varepsilon'',$$

$$|R'_m| < \frac{1}{2}\varepsilon''.$$

D'autre part, en faisant croître indéfiniment l'entier n, l'expression

$$a_1 \cos x - a_3 \cos 3x + \ldots \pm a_{m-2}\cos(m-2)x$$

tend vers

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots \pm \frac{1}{m-2}\cos(m-2)x.$$

On peut donc déterminer un entier N tel que, pour

$$n \geqq N,$$

la différence de ces deux expressions soit inférieure à ε', et il est visible que, pour ces valeurs de n, on aura

$$|S - S'| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

La formule

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots$$

est ainsi démontrée rigoureusement; il faut supposer x compris entre $\pm \frac{\pi}{2}$.

5. On peut obtenir d'une façon analogue le développement

$$\frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x - \ldots.$$

On déterminera d'abord une expression

$$\Psi_n(x) = a_1 \sin 2x + a_2 \sin 4x + \ldots + a_n \sin 2nx,$$

par la condition que le développement de $\Psi_n(x)$ soit de cette forme

$$\Psi_n(x) = x + k_n x^{2n+1} + k_{n+1} x^{2n+3} + \ldots.$$

On obtient immédiatement la valeur de $\Psi_n(x)$ en remarquant que

$$\Psi'_n(x) - x$$

ne peut différer que par un facteur constant de

$$\int_0^x (\sin x)^{2n} \, dx,$$

et la suite du raisonnement est tout à fait semblable à ce que nous venons d'exposer en détail.

SUR LE PROBLÈME DE CLEBSCH (THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES, § 39 A 42);

PAR M. E. FONTANEAU.

1. L'équilibre d'élasticité des corps cylindriques a fait l'objet d'une étude spéciale, à raison de leur emploi