M. J. DOLBNIA

Sur l'analogie entre les fonctions elliptiques et trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 459-471
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__459_0>

SUR L'ANALOGIE ENTRE LES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. J. DOLBNIA, à Nijni-Novgorod.

1. Nous nous proposons de rechercher les fonctions transcendantes qui satisfont à l'équation

$$(1)\qquad \frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u\, \tau^2 a} = \varphi(a) - \varphi(u).$$

Nous distinguerons deux cas : 1° lorsque $\varphi(u)$ a deux périodes (l'une réelle 2ω, l'autre imaginaire $2\omega'$), et 2° lorsque $\varphi(u)$ a une seule période réelle 2ω.

Premier cas. — Soit

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u), \qquad \varphi(u+2\omega') = \varphi(u).$$

En transposant les lettres a et u, nous aurons

$$(2)\qquad \frac{\tau(u+a)\tau(a-u)}{\tau^2 u\, \tau^2 a} = \varphi(u) - \varphi(a).$$

En comparant (1) et (2), nous obtenons

$$\tau(a-u) = -\tau(u-a),$$

c'est-à-dire

$$\tau(-z) = -\tau(z),$$

d'où il suit que $\tau(u)$ est une fonction impaire de l'argument u.

Supposons

$$\lim(u-a) = 0,$$

alors

$$\lim\left[\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2 u\, \tau^2 a}\right]_{u=a} = 0;$$

donc

$$\lim[\tau(u-a)]_{u=a} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\tau(0) = 0.$$

En posant

$$u = a + 2m\omega,$$

où m est un nombre entier, nous avons

$$(3) \qquad \frac{\tau(2a + 2m\omega)\,\tau(2m\omega)}{\tau^2(a + 2m\omega)\,\tau^2 a} = 0.$$

Si $\tau(u)$ est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan, de l'équation (3) nous aurons

$$\tau(2m\omega) = 0.$$

D'une manière semblable, nous trouverons

$$\tau(2m'\omega') = 0;$$

par conséquent, tous les zéros de la fonction $\tau(u)$ sont compris dans la formule suivante

$$(4) \qquad u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

De l'équation (1) nous aurons

$$\frac{\tau(u+a)}{\tau^2 u\,\tau^2 a}\,\frac{\tau(u-a)}{u-a} = -\frac{\varphi(u) - \varphi(a)}{u-a}.$$

En posant ici

$$\lim(u - a) = 0,$$

et en rappelant que les deux fonctions $\tau(u)$ et $\varphi(u)$ doivent avoir des dérivées, nous obtiendrons

$$\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}\,\tau'(0) = -\,\varphi'(u).$$

La constante $\tau'(0)$ est une quantité indéterminée. Nous prenons donc

$$\tau'(0) = 1;$$

alors

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}.$$

De là il suit que le développement de la fonction holomorphe $\tau(u)$, suivant les puissances ascendantes de l'argument, commence par la quantité u et aura la forme suivante

$$\tau(u) = u + \alpha_1 u^3 + \alpha_2 u^5 + \ldots.$$

Il est facile de constater que les infinis de la fonction $\varphi'(u)$ sont les solutions simultanées des deux équations

$$\tau(2u) = 0, \qquad \tau^4(u) = 0;$$

donc $\varphi'(u)$ devient l'infini pour toutes les valeurs de l'argument renfermées dans la formule

$$u = m\omega + m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers pairs.

Les zéros de la fonction $\varphi'(u)$ sont les solutions de l'équation

$$\tau(2u) = 0;$$

si l'on y ajoute l'inégalité

$$\tau(u) \lesseqgtr 0.$$

D'où il suit que les racines de l'équation

$$\varphi'(u) = 0$$

sont définies par la formule

$$u = (2m + 1)\omega + (2m' + 1)\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

Ainsi, dans l'intérieur du parallélogramme élémentaire $(2\omega, 2\omega')$, la fonction $\varphi'(u)$ a trois zéros

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega'$$

et un seul infini

$$u = 0.$$

Il est facile de prouver que cet infini est triple. En effet, de la formule

$$\varphi'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)},$$

il ressort que, u étant infiniment petit, la partie principale de $\varphi'(u)$ est

$$-\frac{2u}{u^4} = -\frac{2}{u^3}.$$

Ainsi $\varphi'(u)$ est la fonction méromorphe doublement périodique du troisième ordre.

En faisant dans l'équation (1)

$$\lim u = 0,$$

nous trouverons que la partie principale de $\varphi(u)$ sera

$$\frac{1}{u^2};$$

par conséquent,

$$\lim[\varphi(u)]_{u=0} = \infty.$$

D'où il suit que tous les infinis de $\varphi(u)$ sont renfermés dans la formule

$$u = 2m\omega + 2m'\omega',$$

où m et m' sont des entiers arbitraires.

A l'intérieur du parallélogramme élémentaire

$$(2\omega, 2\omega'),$$

la fonction $\varphi(u)$ a un seul infini

$$u = 0,$$

et cet infini est double. D'où il suit que $\varphi(u)$ a à l'intérieur du même parallélogramme deux zéros (¹).

(¹) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 241; 1875.

Il est évident que $\wp(u)$ *est la fonction méromorphe doublement périodique du deuxième ordre* ([1]).

2. Nommons

$$\wp(\omega) = e_1, \qquad \wp(\omega + \omega') = e_2, \qquad \wp(\omega') = e_3,$$

et considérons les propriétés des binômes

$$(\wp u - e_1), \qquad (\wp u - e_2), \qquad (\wp u - e_3).$$

Le zéro du binôme $(\wp u - e_1)$ est

$$u = \omega;$$

la même valeur de l'argument annule la fonction

$$\frac{d}{du}[\wp(u) - e_1] = \wp'(u);$$

donc la fonction

$$(\wp u - e_1)$$

a à l'intérieur du parallélogramme $(2\omega, 2\omega')$ un seul zéro

$$u = \omega,$$

et ce zéro est double. En outre, il est clair que

$$\wp u - e_1$$

a un infini double

$$u = 0.$$

Par cette raison, le produit

$$(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \tag{7}$$

a trois zéros doubles

$$u = \omega, \qquad u = \omega + \omega', \qquad u = \omega',$$

([1]) *Ibid.*, p. 197.

et un seul infini sextuple

$$u = 0;$$

par conséquent, (7) *est une fonction méromorphe, doublement périodique du sixième ordre.*

La fonction

$$(\varphi' u)^2$$

possède ces mêmes zéros et ces mêmes infinis; par conséquent,

$$(\varphi' u)^2 = A(\varphi u - e_1)(\varphi u - e_2)(\varphi u - e_3) \quad (^1),$$

où A est la quantité constante. En choisissant e_1, e_2, e_3 de manière que

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

nous parvenons à la fonction $p(u)$ de M. Weierstrass, définie par l'équation différentielle

$$(p' u)^2 = 4p^3 u - g_2 pu - g_3.$$

3. A l'aide de cette équation et du théorème d'Abel relativement à l'addition des arguments, il est facile d'employer les deux formules suivantes,

$$p(u + u_1) + pu + pu_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{p' u - p' u_1}{pu - p' u_1}\right)^2,$$

$$\zeta(u + u_1) - \zeta u - \zeta u_1 = \frac{1}{2}\,\frac{p' u - p' u_1}{pu - pu_1} \quad (^2),$$

où

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \int_0^u \left(\frac{1}{u^2} - pu\right) du.$$

En posant

$$u_1 = \omega,$$

(¹) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 242; 1875.

(²) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 29, 138; 1886.

nous aurons

(8) $$\zeta(\omega + u) = \zeta u + \zeta(\omega) + \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - e_1}.$$

Occupons-nous maintenant de la détermination de la fonction holomorphe $\tau(u)$, qui satisfasse à l'équation transcendante

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = p(a) - p(u).$$

En y supposant

$$a = \omega,$$

nous aurons

$$\frac{\tau(\omega+u)\tau(\omega-u)}{\tau^2 u\,\tau^2\omega} = pu - e_1.$$

Les fonctions $\tau(\omega+u)$, $\tau(\omega-u)$ ont les mêmes zéros; posons donc

$$\begin{aligned} \tau(\omega + u) &= \tau(\omega - u), \\ \tau(u + 2\omega) &= -\tau u, \end{aligned}$$

alors

$$\left\{\frac{\tau(\omega+u)}{\tau u\,\tau\omega}\right\}^2 = pu - e_1,$$

d'où

$$\log\tau(\omega+u) - \log\tau u - \log\tau\omega = \tfrac{1}{2}\log(pu - e_1).$$

En différentiant cette équation relativement à u, nous trouverons

(9) $$\frac{\tau'(\omega+u)}{\tau(\omega+u)} - \frac{\tau' u}{\tau u} = \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - e_1}.$$

Les équations (8) et (9) donnent

$$\frac{\tau'(\omega+u)}{\tau(\omega+u)} - \frac{\tau' u}{\tau u} = \zeta(\omega+u) - \zeta u - \zeta(\omega);$$

d'où il suit que les deux fonctions

$$\frac{\tau' u}{\tau u} \quad \text{et} \quad \zeta(u)$$

peuvent différer seulement par une fonction linéaire de l'argument, et par conséquent supposons

$$\frac{\tau' u}{\tau(u)} = \zeta(u) + 2\alpha u + \beta.$$

Mais $\frac{\tau' u}{\tau u}$ est une fonction impaire de l'argument, donc

$$\beta = 0,$$

et nous aurons

$$\frac{\tau' u}{\tau u} = \zeta u + 2\alpha u,$$

$$\frac{\tau'(u+\omega)}{\tau(u+\omega)} = \zeta(u+\omega) + 2\alpha u + 2\alpha\omega,$$

par conséquent

$$2\alpha\omega = -\zeta(\omega), \qquad 2\alpha = -\frac{\zeta(\omega)}{\omega};$$

donc

$$\frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \frac{\partial}{\partial u}\log\tau(u) = \zeta(u) - \frac{u\zeta(\omega)}{\omega}.$$

La fonction $\sigma(u)$ de M. Weierstrass se définit par l'équation

$$\frac{d}{du}\log\sigma(u) = \zeta(u),$$

d'où

$$\tau(u) = e^{-\frac{u^2\zeta(\omega)}{2\omega}}\sigma(u).$$

La fonction $\tau(u)$ diffère de la fonction $\mathfrak{I}_1(u)$ de Jacobi seulement par le facteur constant (¹).

4. *Deuxième cas.* — Supposons que dans l'équation

$$-\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \varphi(u) - \varphi(a)$$

(¹) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 251; 1886. BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 465; 1875.

la fonction $\varphi(u)$ ait une seule et unique période réelle π. Par cette supposition, nous passons dans le domaine des fonctions trigonométriques. Il est facile de constater les propriétés suivantes :

a. La fonction $\tau(u)$ est impaire et $\varphi(u)$ paire.

b. Les zéros de $\tau(u)$ sont renfermés dans la formule

$$u = m\pi,$$

où m est un nombre entier arbitraire.

c. En posant

$$\tau'(0) = 1,$$

nous aurons

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)};$$

d'où il résulte que les zéros de la fonction $\varphi'(u)$ sont

$$u = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

et les infinis sont

$$u = m\pi.$$

d. Comme $\tau(0) = 0$, $\tau(\pi) = 0$, $\tau'(0) = 1$, la fonction $\tau(u)$ a un *maximum* pour la valeur de l'argument renfermé dans les limites

$$0 < u < \pi,$$

d'où il suit que

$$\tau'(\pi) < 0.$$

Donc, d'après la continuité de $\tau(u)$, nous concluons que

$$\tau(\pi + u), \qquad \tau(\pi - u)$$

ont des signes contraires. D'autre part, ces fonctions s'annulant toujours pour une même valeur de l'argument, nous pouvons supposer

$$\tau(\pi - u) = A\,\tau(\pi + u).$$

où A est une constante négative. Supposons $A = -1$, alors

$$\tau(\pi - u) = -\tau(\pi + u),$$
$$\tau(u + 2\pi) = \tau(u).$$

e. Prenons maintenant l'équation

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}.$$

Pour la valeur infiniment petite de u, la partie principale de $\varphi'(u)$ est

$$-\frac{2}{u^3};$$

par conséquent, si $u > 0$, nous aurons

$$\lim(\varphi' u)_{u=0} = -\infty.$$

Pour $u = \frac{\pi}{2}$, la fonction $\varphi'(u)$ devient égale à zéro, d'où il suit que, dans les limites

$$0 < u < \frac{\pi}{2},$$

notre fonction reste négative.

Par cette raison,

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\frac{\tau(\pi - 2u)}{\tau^4\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} < 0,$$

et comme $\tau(\pi + 2u)$ et $\tau(\pi - 2u)$ ont des signes contraires, nous aurons

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} + u\right) > 0.$$

Ainsi la fonction $\varphi'(u)$, dans les limites

$$\frac{\pi}{2} < u < \pi,$$

reste positive. Par conséquent $\varphi(u)$, pour $u = \frac{\pi}{2}$, atteint le *minimum*. Pour la valeur u infiniment petite, la partie principale de $\varphi(u)$ est $\frac{1}{u^2}$: donc

$$\lim(\varphi u)_{u=0} = +\infty.$$

Supposons le minimum de $\varphi(u) = m$, alors

$$\varphi(u) - m + 1$$

ne devient jamais nul pour les valeurs réelles de l'argument.

5. Nous considérons les deux fonctions trigonométriques

$$F(u) = [\varphi'(u)]^2$$

et

$$f(u) = (\varphi u - m + 1)^2(\varphi u - m).$$

Entre les limites

$$0 < u < \pi,$$

les deux fonctions ont un seul infini $u = 0$ sextuple; $F(u)$ a un zéro double $u = \frac{\pi}{2}$; cette même valeur de l'argument satisfait à l'équation

$$\varphi(u) - m = 0,$$

et, comme

$$\frac{d}{du}(\varphi u - m) = \varphi'(u)$$

s'annule pour la même valeur de l'argument, nous concluons que $f(u)$ a le *zéro double*

$$u = \frac{\pi}{2}$$

entre les mêmes limites. Les deux fonctions $F(u)$, $f(u)$

possèdent une même période, et, par conséquent,

$$F(u) = A\,\varphi(u);$$

la constante A est arbitraire. Posons $A = 4$, alors

$$(\varphi' u)^2 = 4(\varphi u - m + 1)^2(\varphi u - m),$$
$$\varphi'(u) = -2(\varphi u - m + 1)\sqrt{\varphi u - m}.$$

Posons $\varphi(u) = x$, alors

$$\frac{dx}{du} = -2(x - m + 1)\sqrt{x - m},$$

$$du = -\frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}},$$

$$u = -\int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}} + C.$$

Mais, pour $x = \varphi(u) = m$, nous aurons

$$u = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1)\sqrt{x - m}} = \frac{\pi}{2} - u.$$

En faisant $\sqrt{x - m} = \xi$, nous aurons

$$x = m + \xi^2, \qquad dx = 2\xi\,d\xi, \qquad x - m + 1 = 1 + \xi^2,$$

$$\frac{\pi}{2} - u = \int_0^\xi \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \operatorname{arc\,tang}\sqrt{x - m},$$

$$\sqrt{x - m} = \cot u,$$

$$x = m + \cot^2 u,$$

$$\varphi(u) = m + \cot^2 u.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}{\sigma^2(u)\sigma^2(a)} = \cot^2 a - \cot^2 u,$$

$$\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}{\sigma^2 u \,\sigma^2 a} = \frac{\sin(u+a)\sin(u-a)}{\sin^2 u \sin^2 a},$$

d'où il suit que

$$\sigma(u) = \sin u,$$

$$\frac{d}{du}\log \sigma u = \cot u.$$

Ainsi l'analogue de $\wp(u)$ *de M. Weierstrass est* $(m + \cot^2 u)$, *l'analogue de* $\zeta(u)$ *est* $\cot u$, *l'analogue de* $\sigma(u)$ *est* $\sin u$.

6. De tout ce qui précède, il découle naturellement que l'*équation à trois termes* ne peut pas être considérée comme caractéristique pour les fonctions elliptiques, car elle s'étend facilement aux fonctions trigonométriques. En effet, en posant

$$\cot^2 a = A, \qquad \cot^2 b = B,$$

nous aurons

$$\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin^2 a \sin^2 b} = B - A.$$

De l'identité

$$(B-A)(D-C) + (B-C)(A-D) + (B-D)(C-A) = 0,$$

il découle l'équation

$$\begin{aligned} &\sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d) \\ &+ \sin(c+b)\sin(c-b)\sin(d-a)\sin(d+a) \\ &+ \sin(d+b)\sin(d-b)\sin(a+c)\sin(a-c) = 0, \end{aligned}$$

qui n'est autre chose que l'*équation à trois termes*, caractérisant les fonctions trigonométriques aussi bien que les fonctions elliptiques.