NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. MARCHAND

Étude du complexe proposé au concours général de 1883 (suite et fin)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 401-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__401_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉTUDE DU COMPLEXE PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885

[Suite et fin (¹)];

PAR M. E. MARCHAND.

1. *Rectifications.* — Avant d'aller plus loin, je corrigerai deux résultats indiqués trop légèrement dans les considérations géométriques finales.

J'avais admis comme évident que toute droite du complexe, pénétrant entre les deux nappes de la surface des ondes, devait rencontrer la surface en deux points réels et en deux points imaginaires. Or il suffit de couper convenablement par un plan parallèle au *plan double* touchant suivant un cercle pour s'assurer qu'une droite peut parfaitement rencontrer la nappe extérieure en quatre points réels et avoir deux segments compris entre les deux nappes de la surface. Je ne suis plus fondé à dire, comme je l'ai fait à tort, que la droite singulière relative à un point M de la nappe extérieure donne deux foyers imaginaires. Malgré tout l'intérêt géométrique que pourrait présenter une discussion approfondie, je laisserai ce point complètement de côté.

La seconde erreur saute immédiatement aux yeux. J'écrivais : « Les courbes E et I se confondent pour les plans qui touchent la surface des ondes en tous les points d'un cercle. Ce cercle de contact est donc une conique du complexe. » Tout plan tangent à la surface des ondes donnant un système de deux points, il est inadmissible

(¹) *Voir* même Tome, p. 122.

que le plan double, tangent en tous les points d'un cercle, donne un véritable cercle. Quand les courbes E et I tendent vers le cercle de contact, la conique du complexe reste comprise entre ces deux courbes de manière à donner à la limite un point unique comptant double P. D'après les propriétés du cône asymptote

$$(11) \qquad \frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0,$$

il faut que la section de ce cône par le plan double soit un cercle de centre P et non pas le cercle de contact.

Le point P est évidemment, par raison de symétrie, dans le plan principal perpendiculaire au plan double. Ce plan des zx coupe la surface des ondes suivant une ellipse et un cercle qui contiennent respectivement un point P et un point Q du cercle de contact. Le point P, situé sur l'ellipse, est, comme le prouverait un calcul facile que je ne reproduis pas, précisément le point double auquel se réduit la conique du complexe. Le point Q, situé sur le cercle, appartient, comme on sait, à la perpendiculaire abaissée du centre O de la surface sur le plan double. Alors OP est un diamètre de la sphère déterminée par le point O et le cercle de contact.

Si M est un point quelconque du cercle de contact, la droite MP est perpendiculaire à OM. Cette droite MP est donc la droite singulière relative au point M de la surface singulière. Ainsi les droites singulières relatives à tous les points du cercle double passent par le point P de l'ellipse principale. Or ces droites singulières appartiennent toutes au complexe

$$(10) \qquad l\alpha\alpha' + m\beta\beta' + n\gamma\gamma' = 0$$

relatif aux surfaces homothétiques et homofocales

$$(\Sigma) \qquad \frac{x^2}{l+\rho} + \frac{y^2}{m+\rho} + \frac{z^2}{n+\rho} = \sigma.$$

La conique du complexe (10) relative au plan double doit donc se décomposer en deux points dont l'un sera précisément le point P.

Je supprime le calcul de vérification, me bornant à bien montrer d'où vient ce résultat. On sait que tout plan passant par le point à l'infini sur l'un des axes est singulier pour le complexe (10). Cela se comprend facilement si l'on remarque que le complexe (10) des axes des sections planes des surfaces (Σ) doit comprendre tous les diamètres des sections circulaires. Or tout plan de section circulaire est perpendiculaire à l'un des plans de coordonnées, au plan des zx par exemple. Réciproquement tout plan perpendiculaire au plan des zx est plan de section circulaire pour des surfaces (Σ). En particulier, le plan double de la surface des ondes est plan de section circulaire pour des surfaces (Σ) et le centre de ces cercles est le point P.

D'après ce qui précède, pour un plan double la conique du complexe se réduit à un point double; en vertu du principe de dualité, pour un point double D le cône du complexe se réduira à un plan double. Le point double était sur le cercle de contact; le point double sera tangent au cône des tangentes. C'est le plan perpendiculaire à OD mené par D. Comme la droite OD est une focale du cône (11), la section du cône par le plan tangent comptant double admet le point D comme foyer. Pour le point D le cône du complexe (10) se décompose en deux plans dont l'un coïncide avec le plan tangent double. De même que la droite singulière relative à un point M quelconque pris sur le cercle de contact s'obtenait en joignant M au point comptant double P, la droite singulière relative à un plan tangent quelconque du cône des tangentes s'obtiendra en prenant l'intersection avec le plan comptant double. En effet, toutes les droites ainsi obtenues sont bien perpendiculaires au rayon vecteur OD.

2. *Propriétés des droites singulières.* — Pour terminer cette seconde partie de la solution, j'insisterai sur deux propriétés très simples des droites singulières.

Il a été reconnu géométriquement que la droite singulière unique qui passe par le point M de la surface est la droite du plan tangent en M qui est perpendiculaire au rayon vecteur OM. Cela résulte d'ailleurs aussi de la formule

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0. \tag{19}$$

Si l'on désigne par α, β, γ, α', β', γ' les coordonnées d'une droite singulière, de sorte que

$$l\alpha'^2 + m\beta'^2 + n\gamma'^2 - \mathrm{K}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0, \tag{9}$$

$$l\alpha\alpha' + m\beta\beta' + n\gamma\gamma' = 0, \tag{10}$$

le complexe tangent est spécial, et représente une droite

$$l\alpha', \quad m\beta', \quad n\gamma', \quad -\mathrm{K}\alpha, \quad -\mathrm{K}\beta, \quad -\mathrm{K}\gamma,$$

qui, d'après l'équation (10), est perpendiculaire à la droite singulière.

Ces deux droites rectangulaires peuvent facilement se définir géométriquement. Je citerai d'abord textuellement le *Traité d'Analyse* de M. Laurent (t. II, p. 291) :

« La surface des ondes étant représentée par

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) + \ldots = 0, \tag{4}$$

si l'on fait

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \tag{5}$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \mu, \tag{6}$$

$$a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2 = \lambda\mu + a^2b^2c^2,$$

l'équation (4) est satisfaite.... En résolvant les équations précédentes et en posant

$$\Delta = \sum b^2 c^2 (b^2 - c^2),$$

on trouve

$$x = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\Delta}} (\lambda - a^2)^{\frac{1}{2}} (\mu - b^2 c^2)^{\frac{1}{2}};$$

on peut constater que $\sum \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} = 0$, ce qui prouve que les courbes d'intersection de la surface des ondes avec les surfaces (5) et (6), où λ et μ sont constants, se rencontrent à angle droit. »

Il est clair que la tangente MT à toute courbe sphérique tracée sur la sphère (5) est perpendiculaire au rayon vecteur OM. Les droites singulières ne sont donc pas autre chose que les tangentes aux courbes d'intersection des sphères (5) et de la surface des ondes. Ces courbes d'intersection sont des coniques sphériques, comme on le voit, en écrivant l'équation de la surface des ondes sous la forme

$$\frac{x^2}{l - \frac{K}{\lambda}} + \frac{y^2}{m - \frac{K}{\lambda}} + \frac{z^2}{n - \frac{K}{\lambda}} = 0.$$

Considérant λ comme un paramètre variable, on a les cônes homofocaux du cône (11), c'est-à-dire les cônes ayant pour focales les droites qui joignent le centre de la surface des ondes aux points doubles.

Les droites perpendiculaires aux droites singulières, dans le plan tangent à la surface des ondes, qui sont définies ici par le complexe tangent spécial, apparaîtront dans la fin de cette étude comme droites singulières du complexe des droites de même paramètre. Je pourrais me borner à renvoyer le lecteur à la *Géométrie analytique* de M. Pruvost, où il est prouvé que ces droites sont tangentes à des lignes de courbure de quadriques, intersections de deux surfaces homofocales appartenant à une même famille. Conservant les notations de M. Laurent, voici comment je vérifie ces résultats. A la surface des ondes

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{r^2-a^2}+\dfrac{y^2}{r^2-b^2}+\dfrac{z^2}{r^2-c^2}-1=0,\\ \lambda=r^2=x^2+y^2+z^2,\end{cases}$$

je fais correspondre la famille de surfaces homofocales

$$(7)\qquad \frac{x^2}{\rho-a^2}+\frac{y^2}{\rho-b^2}+\frac{z^2}{\rho-c^2}-1=0.$$

Pour un système de valeurs fixes de x, y, z, l'équation (7) donne trois valeurs ρ_1, ρ_2, ρ_3. Si l'on donne à ρ_3 la valeur $r^2=x^2+y^2+z^2$, le point (x, y, z) est sur la surface (4). Développant l'équation (7),

$$\begin{aligned} &-\rho^3+\rho^2(r^2+a^2+b^2+c^2)\\ &\qquad-\rho[(b^2+c^2)x^2+\ldots+b^2c^2+\ldots]=0,\end{aligned}$$

on a d'abord

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=r^2+a^2+b^2+c^2,$$

qui, par suite de $\rho_3=r^2$, donne

$$\rho_1+\rho_2=a^2+b^2+c^2.$$

La somme des deux racines ρ_1 et ρ_2 reste constante. On a ensuite

$$\begin{aligned} &\rho_3(\rho_1+\rho_2)+\rho_1\rho_2\\ &\quad=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-a^2x^2-\ldots+b^2c^2+\ldots,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\lambda(a^2+b^2+c^2)+\rho_1\rho_2\\ &\qquad=(a^2+b^2+c^2)\lambda-\mu+b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\rho_1\rho_2=b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2-\mu.$$

Si donc μ reste constant, les deux paramètres ρ_1 et ρ_2 sont déterminés ; on a l'intersection des deux surfaces de la famille (7) qui correspondent aux valeurs ρ_1 et ρ_2 du paramètre.

A cette propriété, purement géométrique, des droites singulières, j'en ajouterai une autre qui se rattache aux propriétés optiques de la surface des ondes. Je m'appuierai sur les formules démontrées par M. Sarrau (même Recueil, 3e série, t. VII, p. 551) :

« Désignant par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à l'onde plane, par ω la vitesse de propagation, par p, q, r la direction de la vibration rectiligne, on a les équations

$$(91)\qquad \left\{\begin{aligned} (\omega^2-e)p &= -el\,(lp+mq+nr),\\ (\omega^2-f)q &= -fm(lp+mq+nr),\\ (\omega^2-g)r &= -gn(lp+mq+nr). \text{ »}\end{aligned}\right.$$

Il me suffira de rappeler comment je suis parvenu à la forme (35) d'équation de la surface des ondes pour obtenir la conclusion désirée. Mais, préalablement, je dois changer mes notations pour éviter toute confusion. J'écrirai l'équation du complexe

$$(9)\qquad A\alpha'^2+B\beta'^2+C\gamma'^2-K(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0,$$

et le plan tangent en un point sera désigné par

$$ux+vy+wz+\omega=0,\qquad u^2+v^2+w^2=1.$$

On élimine d'abord α, β, γ entre les équations

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma'v-\beta'w &= \alpha\omega,\\ \alpha'w-\gamma'u &= \beta\omega,\\ \beta'u-\alpha'v &= \gamma\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} -K(\gamma v-\beta w) &= A\alpha'\omega,\\ -K(\alpha w-\gamma u) &= B\beta'\omega,\\ -K(\beta u-\alpha v) &= C\gamma'\omega.\end{aligned}\right.$$

ce qui donne

$$\alpha'\left(\omega^2 - \frac{K}{A}\right) = -\frac{K}{A}\,u(u\alpha' + v\beta' + w\gamma'),$$

$$\beta'\left(\omega^2 - \frac{K}{B}\right) = -\frac{K}{B}\,v(u\alpha' + v\beta' + w\gamma'),$$

$$\gamma'\left(\omega^2 - \frac{K}{C}\right) = -\frac{K}{C}\,w(u\alpha' + v\beta' + w\gamma').$$

Ces équations, si l'on pose

$$\frac{K}{A} = e, \qquad \frac{K}{B} = f, \qquad \frac{K}{C} = g,$$

ne diffèrent des équations (91) que par les notations. La normale à l'onde plane est la normale u, v, w à la surface des ondes en M; la vitesse de propagation ω est la distance de l'origine au plan tangent en M; la direction de la vibration rectiligne est α', β', γ'. Or on sait que

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$$

est le plan qui passe par la droite α, β, γ, α', β', γ' et l'origine des coordonnées. La direction de la vibration est donc perpendiculaire au plan mené par l'origine et par la droite singulière. « Les deux racines ω^2 sont fournies par l'équation

$$(94) \qquad \frac{l^2}{\omega^2 - e} + \frac{m^2}{\omega^2 - f} + \frac{n^2}{\omega^2 - g} = 0.$$

qui coïncide avec l'équation aux vitesses des ondes planes trouvée par Fresnel.

» A chacune de ses racines correspond une direction déterminée de la vibration, de sorte que, dans chaque direction se propagent, avec des vitesses différentes, deux ondes planes polarisées. »

Le résultat est très net. Si D et D' sont les deux points doubles réels de la surface, par chaque rayon vecteur OM passent deux cônes ayant pour focales communes OD et OD'.

D'après les propriétés des coniques sphériques, les plans tangents à ces cônes le long de OM, lesquels passent, d'après ce qui précède, par les droites singulières, sont les plans bissecteurs des plans DOM, D'OM. Des normales à ces plans bissecteurs, droites de direction α', β', γ', sont les perpendiculaires menées à OM dans ces plans bissecteurs. Ce sont précisément les directions des deux rayons lumineux polarisés qui se propagent dans la direction OM.

Troisième Partie.

J'arrive maintenant à la recherche de la surface singulière en coordonnées de droites, et je n'aurai le plus souvent qu'à appliquer au complexe spécial traité ici les résultats généraux indiqués par M. Klein (*Mathematische Annalen,* zweiter Band, 1870). Je renverrai d'ailleurs à l'article cité pour toutes les propriétés géométriques qui ne trouveront pas place ici.

1. *Forme canonique.* — Je considère le complexe

$$a^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + c^2\gamma'^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0, \tag{1}$$

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0. \tag{2}$$

Pour le ramener à la forme canonique de M. Klein, je remplace les six coordonnées α, β, γ, α', β', γ' par six autres x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 définies par

$$\tag{3} \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{a}\,x_1 = \alpha + ai\alpha', & i\sqrt{a}\,x_2 = \alpha - ai\alpha', \\ \sqrt{b}\,x_3 = \beta + bi\beta', & i\sqrt{b}\,x_4 = \beta - bi\beta', \\ \sqrt{c}\,x_5 = \gamma + ci\gamma', & i\sqrt{c}\,x_6 = \gamma - ci\gamma'. \end{array} \right.$$

Les équations (1) et (2) sont remplacées par

$$(4)\qquad a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_3^2 - x_4^2) + c(x_5^2 - x_6^2) = 0,$$

$$(5)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Je rappellerai que l'équation (4) n'est qu'un cas particulier de la forme canonique relative au complexe du second degré le plus général,

$$(4\,bis)\qquad k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + k_3x_3^2 + k_4x_4^2 + k_5x_5^2 + k_6x_6^2 = 0.$$

Pour le complexe général (4 *bis*), la surface singulière est une surface de degré 4 et de classe 4, à 16 plans doubles et 16 points doubles, étudiée sous le nom de *surface de Kummer*.

Avec les coordonnées tétraédriques ordinaires qui correspondent à l'identité (2), le complexe général se ramène à la forme

$$\begin{aligned} A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + A'\alpha'^2 + B'\beta'^2 + C'\gamma'^2 \\ + 2D\alpha\alpha' + 2E\beta\beta' + 2F\gamma\gamma' = 0. \end{aligned}$$

Si les trois rectangles peuvent disparaître, c'est-à-dire si

$$D = E = F,$$

il serait facile de disposer des trois constantes g, h, k de manière que la transformation homographique

$$x = gX, \qquad y = hY, \qquad z = kZ$$

ramenât à la forme (1)

$$l\alpha'^2 + m\beta'^2 + n\gamma'^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Lorsque ce cas se présente,

$$D = E = F,$$

la surface singulière est ce que l'on appelle un *tétraédroïde*.

Je laisserai, d'ailleurs, complètement de côté ces questions plus générales pour me borner au complexe (1).

2. *Tangentes de la surface singulière.* — Le point singulier associé N est déterminé par la droite singulière $D(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ et par la droite $\Delta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$ que définit le complexe tangent spécial

$$\alpha_1 = a^2\alpha', \qquad \alpha'_1 = -\alpha.$$

Une tangente T à la surface singulière est une droite passant par le point N d'intersection de D et Δ dans le plan $D\Delta$. Je dis qu'elle a pour coordonnées

$$\lambda\alpha + \alpha_1, \quad \dots \quad \lambda\alpha' + \alpha'_1, \quad \dots$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'on peut définir trois droites D, Δ, T satisfaisant aux conditions précédentes respectivement par

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta & \theta \\ x & y & z & t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta & \theta \\ x' & y' & z' & t' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta & \theta \\ \lambda x + x' & \lambda y + y' & \lambda z + z' & \lambda t + t' \end{pmatrix}.$$

La reciproque se démontre sans difficulté en supposant, bien entendu, que les droites D et Δ aient un point commun; le paramètre λ a une signification géométrique bien connue qui sera utilisée par la suite.

Si l'on effectue la transformation définie par les formules (3), les droites D et Δ prendront les coordonnées $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ et $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6$. On aura

$$\sqrt{a}\,x'_1 = a^2\alpha' - ai\alpha = -iax_1.$$

et, au lieu de $\lambda\alpha + \alpha_1$, on trouverait

$$\lambda x_1 + x'_1 = x_1(\lambda - ia).$$

Pour éviter les imaginaires, on posera $\lambda = -i\sigma$, et la tangente T deviendra, en divisant les six coordonnées homogènes par $-i$,

$$(\sigma + a)x_1, \quad \ldots.$$

3. *Surface singulière.* — Je suivrai ici, pas à pas, le calcul de M. Klein. Le complexe général est représenté par

$$(4) \qquad k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 + k_5 x_5^2 + k_6 x_6^2 = 0,$$

$$(5) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Les formules de transformation (3) permettent de vérifier que le complexe du premier ordre

$$\Sigma a_i x_i = 0$$

sera spécial quand on aura

$$\Sigma a_i^2 = 0.$$

Appliquant cette condition au complexe tangent

$$k_1 x_1 x'_1 + \ldots = 0,$$

on voit que les droites singulières seront définies par (4), (5) et

$$(6) \qquad k_1^2 x_1^2 + k_2^2 x_2^2 + k_3^2 x_3^2 + k_4^2 x_4^2 + k_5^2 x_5^2 + k_6^2 x_6^2 = 0.$$

En vertu de (5), on peut altérer tous les coefficients du complexe (4) d'une même constante, et l'on obtient facilement

$$(4\ bis) \qquad (k_1 + \sigma)\, x_1^2 + (k_2 + \sigma)\, x_2^2 + \ldots = 0,$$

$$(5\ bis) \qquad x_1^2 + \ldots\ldots + x_2^2 + \ldots = 0,$$

$$(6\ bis) \qquad (k_1 + \sigma)^2 x_1^2 + (k_2 + \sigma)^2 x_2^2 + \ldots = 0.$$

Dans le complexe du concours, on doit prendre

$$k_1 = a, \qquad k_2 = -a, \qquad \ldots.$$

Si l'on prend $k_1 x_1$, $k_2 x_2$, ... pour coordonnées de la droite, définie par le complexe spécial et que l'on désigne par $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ les coordonnées d'une tangente T, on pourra poser

$$y_i = \sigma x_i + k_i x_i,$$

et, d'après la remarque faite au n° 2, on aura

$$\sigma = i\lambda,$$

λ ayant la signification géométrique indiquée.

Ayant $y_i = x_i(k_i + \sigma)$, on obtient

$$x_i = \frac{y_i}{k_i + \sigma},$$

et, portant dans les équations (6 *bis*), (4 *bis*) et (5),

$$(7) \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 0,$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{y_1^2}{k_1+\sigma} + \frac{y_2^2}{k_2+\sigma} + \frac{y_3^2}{k_3+\sigma} \\ & \qquad + \frac{y_4^2}{k_4+\sigma} + \frac{y_5^2}{k_5+\sigma} + \frac{y_6^2}{k_6+\sigma} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^2} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^2} + \frac{y_3^2}{(k_3+\sigma)^2} \\ & \qquad + \frac{y_4^2}{(k_4+\sigma)^2} + \frac{y_5^2}{(k_5+\sigma)^2} + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (7) apprend seulement que $y_1, y_2, \ldots$ sont les coordonnées d'une droite.

« L'équation (8) est du quatrième degré en σ. L'équation (9) apprend que la dérivée de (8) relativement à σ est nulle. L'équation en coordonnées de droite de la surface singulière est le discriminant de l'équation (8) pris par rapport à σ. Comme cela doit être, cette équation est de degré 12. »

4. *Faisceau de complexes.* — Cela fait, M. Klein énonce ce résultat très remarquable, que je me propose de démontrer directement.

« Si σ prend une valeur numérique déterminée, l'équation (8) représente un complexe du second degré. Ce complexe a même surface singulière que le complexe (4), car le système des équations (7), (8), (9) ne change pas si k_α est remplacé par $\frac{1}{k_\alpha + \sigma}$.

» L'équation (8) donne le système de complexes du second degré liés à la surface singulière. Cette équation est analogue à celle des surfaces homofocales du second degré. »

Laissant au lecteur le soin de vérifier que les équations (7), (8), (9) ne changent pas si l'on remplace k_α par $\frac{1}{k_\alpha + \sigma}$, je remarquerai que, éliminer σ entre (8) et (9), c'est chercher une équation qui soit vérifiée par les coordonnées des droites singulières de tous les complexes (8), car le complexe tangent de (8)

$$\frac{y_1 y'_1}{k_1 + \sigma} + \ldots = 0$$

n'est spécial que si l'équation (9) est vérifiée. Or, d'après le raisonnement primitif, toutes les droites vérifiant l'équation obtenue en éliminant σ entre (8) et (9) doivent être tangentes à la surface singulière de (4). Il faut donc que les droites singulières de tous les complexes (8) soient tangentes à la surface singulière de (4), ce qui exige que tous les complexes (8) aient même surface singulière.

Il reste à établir que tous les complexes du second ordre admettant la surface donnée comme surface singulière sont compris dans la formule (8). Pour cela, on remarque d'abord que, « si (y) est une droite donnée, l'équation (8) définit quatre complexes passant par la droite et admettant la surface donnée comme surface singulière ». Il suffit de prouver directement que l'on peut construire quatre complexes du second ordre qui admettent une surface de Kummer donnée comme surface singulière, et qui passent en outre par une droite donnée. »

N'ayant pas à ma disposition les théorèmes généraux sur lesquels M. Klein s'appuie, je proposerai la démonstration suivante :

Soient A la droite donnée que je ne suppose pas tangente à la surface, et a_1, a_2, a_3, a_4 ses points d'intersection avec la surface. Si l'on imagine un complexe du second degré passant par A, il admettra en a_1 une droite singulière unique que j'appellerai D.

Je dis que le plan AD est tangent à la surface. En effet, d'après les propriétés des droites singulières, la section par le plan AD, si elle était indécomposable, serait tangente à D en a_1; comme la droite A doit être aussi tangente à la conique comme droite du complexe, cette conique se réduit évidemment à deux points, dont l'un est le point a_1. Le plan AD est tangent et non en a_1. Si l'on joint a_1 à son point de contact m_1, on aura la droite singulière relative à ce plan, qui rencontrera la surface en un point nouveau b_1 qui est le second point cherché. Le cône relatif au point b_1 comprenant déjà le plan AD doit passer par la droite singulière relative à b_1, qui se trouve alors déterminée.

La droite singulière étant déterminée en a_1 se trouvera, par cela même, déterminée en a_2, a_3 et a_4. En effet, j'ai remarqué que le plan tangent tourne régulièrement de 180° quand le sommet du cône décrit une droite A du complexe. Cela fixe les plans tangents à choisir en a_2, a_3, a_4 dès que le plan tangent en a_1 a été choisi. J'aurais d'ailleurs pu dire aussi que le rapport anharmonique des plans tangents en quatre points d'une génératrice du complexe était le même que celui des quatre points correspondants, ce qui donne ce théorème connu :

Le rapport anharmonique des quatre plans tangents que l'on peut mener par une droite à une surface de Kummer est égal au rapport anharmonique des quatre points d'intersection de la droite avec la surface.

Les droites singulières en a_1, a_2, a_3, a_4 étant déterminées, on obtiendra un point b_1 donnant des génératrices $b_1 a_2$, $b_1 a_3$, $b_1 a_4$ du complexe, et de même des points b_2, b_3, b_4, en remplaçant successivement a_1 par a_2, a_3, a_4.

Je dis que le cône du complexe relatif à tout point a de la droite A est déterminé. On lui connaît, en effet, cinq génératrices distinctes A, ab_1, ab_2, ab_3, ab_4.

La même chose a lieu pour les droites $b_1 a_2$, $b_1 a_3$, $b_1 a_4$, ..., c'est-à-dire pour douze nouvelles droites.

Cela posé, si l'on veut déterminer la conique du complexe située dans un plan quelconque, on déterminera l'intersection à distance finie ou infinie du plan donné avec la droite A et les douze droites auxquelles on pourrait adjoindre les droites joignant a_1, a_3, a_4 aux deux nouveaux points de rencontre de $b_1 a_2$ avec la surface, etc. Si a est l'intersection avec A, le cône de sommet a étant déterminé, les deux génératrices suivant lesquelles il est coupé par le plan sont deux tangentes à la conique cherchée. J'obtiens donc au moins vingt-six tangentes pour déterminer la conique, ce qui est plus que suffisant.

La conique relative à un plan quelconque étant déterminée, pour obtenir un cône de sommet S, il suffit de faire passer trois plans par ce point et de mener les six tangentes aux coniques déterminées par les trois plans.

En résumé, la droite D étant choisie, le complexe est parfaitement déterminé. Or, la droite D étant l'intersection du plan tangent en a_1 avec l'un des quatre plans menés par A, on aura en général quatre solutions distinctes.

On peut facilement ajouter ce théorème :

Quand une surface de Kummer est donnée ainsi qu'une droite tangente, on peut construire, et d'une seule manière, un complexe du second degré qui admette la surface comme surface singulière, et la droite comme ligne droite singulière.

En effet, soit D la tangente donnée. Je mène par la droite D un quelconque des deux plans tangents dont le point de contact ne soit pas le point de contact de D avec la surface. Toute droite A située dans ce plan et passant par le point de contact de D avec la surface doit appartenir au complexe, qui est parfaitement déterminé, puisqu'on connaît une droite A et la droite singulière D en un des points a_1 où A rencontre la surface.

L'équation générale (8) nous montre en outre ce résultat curieux, que si l'on part du complexe (4) et qu'on prenne en un point M de la surface la tangente T qui divise l'angle DΔ dans un rapport déterminé par le paramètre λ, ce rapport se maintiendra constant en tout point de la surface. En général, étant donnés quatre complexes du faisceau dont les droites singulières forment un rapport anharmonique R en un point particulier M de la surface singulière, on peut affirmer que ce rapport anharmonique se trouvera invariable en tout autre point de la surface.

5. *Cas particulier.* — Pour le complexe étudié ici

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_3^2 - x_4^2) + c(x_5^2 - x_6^2) = 0,$$

le faisceau se réduit à

$$\frac{x_1^2}{a+\sigma} + \frac{x_2^2}{-a+\sigma} + \ldots = 0$$

et, en revenant aux α, β, γ, α', β', γ' par les formules (3),

$$\frac{(\alpha + ai\alpha')^2}{a(a-\sigma)} - \frac{(\alpha - ai\alpha')^2}{a(-a+\sigma)} - \ldots = 0.$$

Les deux premiers termes donnent, en les ajoutant,

$$\frac{1}{a}\,\frac{4ai\sigma\alpha\alpha' - 2a(\alpha^2 - a^2\alpha'^2)}{\sigma^2 - a^2},$$

et, en remplaçant σi par λ, comme on devait s'y attendre, on trouve

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\lambda\alpha\alpha' + a^2\alpha'^2 - \alpha^2}{\lambda^2 + a^2} + \frac{2\lambda\beta\beta' - b^2\beta'^2 - \beta^2}{\lambda^2 + b^2} \\ &\qquad + \frac{2\lambda\gamma\gamma' + c^2\gamma'^2 - \gamma^2}{\lambda^2 + c^2} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Pour que l'on puisse faire disparaître les rectangles, il faut et il suffit que

$$\frac{\lambda}{\lambda^2 + a^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + b^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + c^2},$$

ce qui, en supposant a, b et c différents, ne donne que deux solutions $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Or, comme on va le voir en développant l'équation (10), les deux complexes particuliers que l'on trouve ainsi sont, d'une part le complexe étudié ici, d'autre part le complexe des droites de même paramètre. D'après la signification de λ, on voit que les droites singulières de ces deux complexes, correspondant au même point de la surface des ondes, sont rectangulaires. D'une manière plus complète, en un point M de la surface des ondes, il existe une droite singulière D pour notre complexe; le complexe spécial tangent définit une perpendiculaire Δ à D. Si l'on passe au complexe des droites de même paramètre, D et Δ s'intervertissent.

Développant, on trouve

$$\begin{aligned}\lambda^4(a^2\alpha'^2+\ldots-\alpha^2\ldots)&+2\lambda^3[(b^2+c^2)\alpha\alpha'\ldots]\\&+\lambda^2[(b^2+c^2)(a^2\alpha'^2-\alpha^2)\ldots]\\&+2\lambda[b^2c^2\alpha\alpha'+\ldots]\\&\qquad+[b^2c^2(a^2\alpha'^2-\alpha^2)+\ldots]=0.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{gathered}(b^2+c^2)\alpha\alpha'+\ldots=-a^2\alpha\alpha'-b^2\beta\beta'-c^2\gamma\gamma',\\ b^2c^2(a^2\alpha'^2-\alpha^2)+\ldots\\ =\frac{1}{a^2b^2c^2}\left(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\right),\\ b^2c^2\alpha\alpha'+\ldots=\frac{1}{a^2b^2c^2}\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}\right).\end{gathered}$$

On voit que, si la droite donnée est sur le complexe étudié ici, l'équation en λ a une racine infinie; si la droite donnée est droite singulière sur le complexe, on a deux racines infinies.

D'ailleurs, il ne faut pas oublier que les coefficients a^2, b^2, c^2 des complexes ne sont nullement les carrés des demi-axes des surfaces du second degré qui ont servi à définir les deux complexes remarquables dont il s'agit.

6. *Théorème final.* — Soit le faisceau général

$$\frac{x_1^2}{k_1+\sigma}+\frac{x_2^2}{k_2+\sigma}+\ldots=0. \tag{8}$$

Les droites singulières relatives à un complexe du faisceau ne dépendent que de deux paramètres. L'équation (8) va permettre de les exprimer effectivement en fonction de deux paramètres.

Je puis toujours faire correspondre le complexe considéré à la valeur o du paramètre σ. Pour toute droite singulière de ce complexe, l'équation (8) aura, outre deux racines nulles, deux racines que je désigne par ρ et ρ_1. On a identiquement, en désignant par c un paramètre qu'il est inutile de déterminer,

$$\sum \frac{x_i^2}{k_i+\sigma} = c\frac{(\rho-\sigma)(\rho_1-\sigma)\sigma^2}{(k_1+\sigma)(k_2+\sigma)\ldots(k_6+\sigma)},$$

d'où, en faisant successivement $\sigma = k_1$, $\sigma = k_2$, ...,

$$\begin{gathered} x_1^2 = A_1(\rho-k_1)(\rho_1-k_1), \\ x_2^2 = A_2(\rho-k_2)(\rho_1-k_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Or, de là résulte (DARBOUX, *Leçons sur les surfaces*, t. I, p. 142) que les six coordonnées homogènes de la droite satisfont à l'équation

$$(\rho-\rho_1)\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} - \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0.$$

Cette équation différentielle est précisément celle que M. Darboux désigne par la notation (t. II, p. 70)

$$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Il me suffit maintenant de citer le résultat suivant, démontré par M. Darboux (t. II, p. 345) :

« Soient (G) une congruence de droites, (Σ) et (Σ_1) les deux nappes de sa surface focale :

» La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes (Σ), (Σ_1) est que les six coordonnées de chaque droite de la congruence, qui sont fonctions de deux paramètres variables, vérifient une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. »

D'une manière plus générale, on peut considérer la congruence formée par les droites communes à deux complexes du faisceau. Si l'on substitue dans (8) les coordonnées d'une pareille droite, deux racines de l'équation en σ sont connues, et, en désignant les deux autres par ρ et ρ_1, le calcul précédent subsiste sans modification. Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.