L. LEFEVRE

Intersection d'une droite et de la surface réglée définie par trois directrices rectilignes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 389-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__389_1>

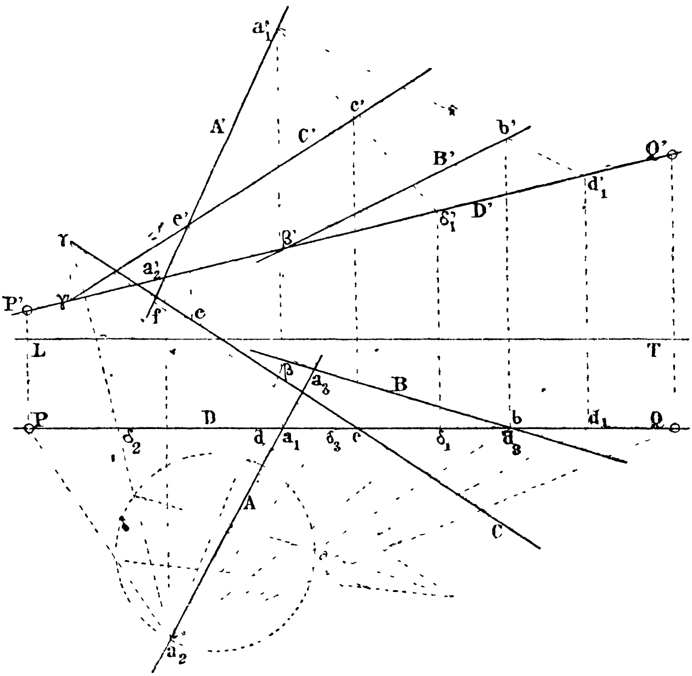
INTERSECTION D'UNE DROITE ET DE LA SURFACE RÉGLÉE DÉFINIE PAR TROIS DIRECTRICES RECTILIGNES;

Par M. L. LEFEVRE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens.

Des droites variables G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, ... rencontrent trois droites fixes A, B, C respectivement aux points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ...; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, ... Je dis que ces trois séries de points sont homographiques deux à deux. Il suffit, pour cela, d'établir l'égalité des rapports anharmoniques, tels que (b_1, b_2, b_3, b_4) et (c_1, c_2, c_3, c_4); c'est ce qu'on reconnaît immédiatement en coupant B et C par les plans menés par A et chacune des génératrices G_1, G_2, G_3, G_4.

Cette remarque va nous permettre d'obtenir les points d'intersection d'une droite donnée D avec la surface engendrée par les droites G, ce qui revient à trouver une droite G s'appuyant sur D. On est conduit à considérer les deux hyperboloïdes définis par les directrices A, B, D et A, C, D. Les génératrices du premier coupent A et D en des points a_1, a_2, a_3, a_4, ..., d_1, d_2, d_3, d_4, ...; celles du second en des points a_1, a_2, a_3, a_4, ..., δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, ...

Or, d'après ce qui précède, les deux divisions tracées sur D : d_1, d_2, d_3, d_4, ..., δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, ..., sont ho-



mographiques à a_1, a_2, a_3, a_4, ... ; elles sont donc homographiques entre elles. Les points doubles P et Q de cette homographie sont les points cherchés, puisque par chacun de ces points passe une droite qui s'appuie à la fois sur A, B, D et sur A, C, D, c'est-à-dire sur A, B, C, D.

Pour définir une homographie, trois couples suffisent.

Donc, par trois points quelconques a_1, a_2, a_3 de A, on mènera les droites qui s'appuient sur B et D et celles qui s'appuient sur C et D : on aura ainsi les trois couples $d_1\delta_1$, $d_2\delta_2$, $d_3\delta_3$.

Dans l'épure, on a placé a_1 à l'intersection de A et du plan projetant D horizontalement, puis on a coupé B et C par ce plan, ce qui donne aisément d_1 et δ_1. On place a_2 à l'intersection de A et du plan projetant D verticalement, d'où d_2, δ_2. On prend a_3 au point d'intersection de A et du plan projetant B horizontalement; ce plan contenant a_3 et B coupe D au point d_3. Enfin on mène par a_3 une droite qui coupe C; on prend celle dont la projection verticale est A′, elle coupe C en e, e' : sa projection horizontale est a_3e. Le plan passant par cette droite et par C coupe D en δ_3.

Quant à la construction des points doubles, elle se fait très simplement à l'aide d'un cercle que l'on peut faire passer par a_2 pour simplifier (voir *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 1119).