Nouvelles annales de mathématiques

A. Astor

Potentiel d'un ellipsoïde homogène ou composé de couches homogènes concentriques, dont la densité varie d'une couche à la suivante

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 232-243

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__232_1>

POTENTIEL D'UN ELLIPSOIDE HOMOGÈNE OU COMPOSÉ DE COUCHES HOMOGÈNES CONCENTRIQUES, DONT LA DENSITÉ VARIE D'UNE COUCHE A LA SUIVANTE;

Par M. A. ASTOR.

I. Considérons deux surfaces fermées S et S_1 homothétiques et infiniment voisines. Soient O le centre d'homothétie, v le volume de la couche comprise entre les deux surfaces. Un rayon issu de O les coupe en deux points A et A_1 infiniment voisins, pour lesquels les plans tangents sont parallèles. Menons la normale en A à S; elle coupe S_1 en un point B_1 infiniment voisin de A_1; la distance de B_1 au plan tangent en A_1 est d'ordre supérieur au premier, et, si nous appelons dn la distance AB_1, nous pouvons la supposer égale à la distance des deux plans tangents. Dès lors, P étant la perpendiculaire menée de O sur le plan tangent en A, nous aurons

$$dn = P\frac{dr}{r},$$

$\frac{dr}{r}$ étant le rapport constant $\frac{AA_1}{OA}$.

Si nous considérons sur S des points infiniment voisins de A, nous voyons que la longueur dn en ces différents points demeurera constante, aux infiniment petits d'ordre supérieur au premier près. Nous l'appellerons l'*épaisseur normale de la couche* au point A. Ceci posé, soient $d\sigma$ un élément superficiel de S en A et dv l'élément du volume de la couche, limité entre S, S_1, le contour de $d\sigma$ et les normales le long de ce contour; nous aurons

$$dv = d\sigma\, dn = P\, d\sigma \frac{dr}{r}.$$

Supposons qu'on ait pris des axes rectangulaires passant en O; nous aurons, avec les notations habituelles,

$$d\sigma = dx\, dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$
$$P = \frac{z-px-qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

de sorte que

$$dv = dx\, dy\frac{dr}{r}(z-px-qy).$$

Si l'équation de S est de la forme

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 1,$$

où f est une fonction homogène et de degré m,

$$z - px - qy$$

devient, d'après le théorème d'Euler, égal à $\frac{m}{f'_z}$, et l'on a

$$dv = m\,\frac{dx\,dy}{f'_z}\,\frac{dr}{r}.$$

Faisons maintenant la transformation homographique définie par les formules $x = \lambda x'$, $y = \mu y'$, $z = \nu z'$, où λ, μ, ν sont des constantes données; l'équation (1) se transformera en la suivante :

$$\varphi(x', y', z') = f(\lambda x', \mu y', \nu z') = 1, \tag{2}$$

qui représente une surface S′ dont les points x', y', z' correspondent individuellement aux points x, y, z de S. Considérons la couche comprise entre S′ et une surface homothétique S'_1 infiniment voisine, définie par le rapport $\frac{dr'}{r'}$; nous aurons, pour l'élément dv' de cette couche correspondant à l'élément dv de la première,

$$dv' = \frac{m\,dx'\,dy'}{\varphi'_{z'}}\,\frac{dr'}{r'} = \frac{m}{\lambda\mu\nu}\,\frac{dx\,dy}{f'_z}\,\frac{dr'}{r'},$$

de sorte que

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\,\frac{\frac{dr'}{r'}}{\frac{dr}{r}}.$$

Ce rapport étant constant est égal à celui des volumes des deux couches, et ces dernières peuvent être divisées en éléments correspondants qui sont dans le rapport des volumes des couches elles-mêmes.

Si nous considérons deux ellipsoïdes dont les équations seraient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1.$$

nous voyons qu'ils rentrent dans le cas précédent, en posant

$$\lambda = \frac{a}{a'}, \qquad \mu = \frac{b}{b'}, \qquad \nu = \frac{c}{c'},$$

et, pour le rapport de deux éléments correspondants de deux couches comprises, d'une part entre les ellipsoïdes d'axes a, b, c, $a + da$, $b + db$, $c + dc$, d'autre part entre les ellipsoïdes d'axes a', b', c', $a' + da'$, $b' + db'$, $c' + dc'$, satisfaisant aux conditions

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c},$$
$$\frac{da'}{a'} = \frac{db'}{b'} = \frac{dc'}{c'},$$

nous aurons

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{a'b'c'}{abc} \frac{\frac{da'}{a'}}{\frac{da}{a}} = \frac{b'c'\,da'}{bc\,da}.$$

II. Proposons-nous maintenant de calculer le potentiel d'un ellipsoïde E d'axes A, B, C, en un point M de coordonnées α, β, γ.

Nous supposerons d'abord l'ellipsoïde homogène et le point M extérieur. Décomposons E en couches infiniment minces par des ellipsoïdes homothétiques et concentriques, et soient a, b, c, $a + da$, $b + db$, $c + dc$ les axes des ellipsoïdes e et e_1 qui limitent une de ces couches; calculons le potentiel de cette couche. Pour cela, par M faisons passer l'ellipsoïde e', d'axes a', b', c', homofocal à e, et formons une couche ellipsoïdale au moyen de e' et de l'ellipsoïde e'_1 homothétique à e' et d'axes $a' + da'$, $b' + db'$, $c' + dc'$. Sur e prenons l'homologue M' de M; soient u la distance d'un point D' de e à M, u' la distance, égale à u, de son homologue D sur e'

à M′; ρ étant la densité commune des deux couches v et v', nous aurons, en appelant dV et dV' les potentiels de v en M et de v' en M′,

$$dV' = \rho \int \frac{dv'}{u'},$$

$$dV = \rho \int \frac{dv}{u} = \frac{bc\,da}{b'c'\,da'}\,dV'.$$

Pour avoir dV, il suffit donc de calculer dV' et de le multiplier par le rapport $\frac{bc\,da}{b'c'\,da'}$ des volumes des deux couches.

Le potentiel dV' étant indépendant de la position du point M′ intérieur à la couche e', nous pouvons le calculer, et c'est ce que nous allons faire, en supposant le point au centre même de la couche. Calculons le potentiel de l'ellipsoïde e' au centre O. Considérons un cône infiniment délié de sommet O et d'ouverture $d\omega$ dont une nappe coupe e' en D′. Soient x', y', z', u' les coordonnées de D′ et sa distance au centre. Le potentiel de la nappe est

$$\rho \int_0^{u'} u\,du\,d\omega = \rho\,d\omega\,\frac{u'^2}{2}.$$

Si nous posons

$$x' = u'\cos\theta, \qquad y' = u'\sin\theta\cos\psi, \qquad z' = u'\sin\theta\sin\psi,$$

nous pouvons faire

$$d\omega = \sin\theta\,d\theta\,d\psi;$$

d'autre part,

$$u'^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a'^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b'^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c'^2}},$$

le potentiel V' de e' est donc

$$\frac{\rho}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$
$$\times\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\left(\frac{\cos^2\theta}{a'^2}+\frac{\sin^2\theta}{b'^2}\right)\cos^2\psi+\left(\frac{\cos^2\theta}{a'^2}+\frac{\sin^2\theta}{c'^2}\right)\sin^2\psi}.$$

En posant $\cos\theta = v$, on peut ramener immédiatement cette intégrale double, par un calcul connu, à la forme

$$2\pi\rho\frac{b'c'}{a'^2}a'^2\int_0^1\frac{dv}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le potentiel $V'+dV'$ de l'ellipsoïde e'_1, homothétique à e', s'obtiendra en remplaçant, dans la formule précédente, les axes a', b', c' par ceux de e'_1, et, comme $\frac{b'c'}{a'^2}$, $\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}$, $\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}$ ne changent pas, on voit que

$$dV' = 2\pi\rho\frac{b'c'}{a'^2}da'^2\int_0^1\frac{dv}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour avoir dV, il suffit de multiplier dV' par $\frac{bc\,da}{b'c'\,da'}$, et, comme $da'^2 = 2a'\,da'$, on voit que

$$dV = 4\pi\rho\frac{bc\,da}{a'}\int_0^1\frac{dv}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Faisons le changement de variable donné par la formule

$$\frac{v}{a'} = \frac{u}{a},$$

remarquons que

$$b'^2-a'^2 = b^2-a^2,\qquad c'^2-a'^2 = c^2-a^2,$$

et posons, comme c'est l'usage,

$$\frac{b^2-a^2}{a^2}=\frac{B^2-A^2}{A^2}=\lambda^2, \qquad \frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{C^2-A^2}{A^2}=\lambda'^2;$$

il vient

$$\begin{aligned} dV &= 4\pi\rho\frac{bc\,da}{a}\int_0^{\frac{a}{a'}}\frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}\\ &= 4\pi\rho\frac{BC}{A^2}\,a\,da\int_0^{\frac{a}{a'}}\frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Le facteur $4\pi\rho\frac{BC}{A^2}$ est égal à $\frac{3M}{A^3}$, M étant la masse de E.

Remarquons que a' est donné par l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a'^2}+\frac{\beta^2}{a'^2+b^2-a^2}+\frac{\gamma^2}{a'^2+c^2-a^2}=1,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\alpha^2}{\left(\frac{a'^2}{a^2}\right)}+\frac{\beta^2}{\frac{a'^2}{a^2}\left(1+\lambda^2\frac{a^2}{a'^2}\right)}+\frac{\gamma^2}{\frac{a'^2}{a^2}\left(1+\lambda'^2\frac{a^2}{a'^2}\right)}=a^2.$$

Si donc nous posons $\frac{a}{a'}=u$, nous voyons que

$$a^2=u^2\left(\alpha^2+\frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2}+\frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)$$

et

$$\begin{aligned} dV = \frac{3M}{2A^3}\,d\left[u^2\left(\alpha^2+\frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2}+\frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right]\\ \times\int_0^u\frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Si nous appelons A′, B′, C′ les axes de l'ellipsoïde homofocal de E qui passe en M, u variera de o à $\frac{A}{A'}$, de sorte que

$$V = \frac{3M}{2A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} d\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$\times \int_0^u \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Intégrons par parties et remarquons que, pour $u = \frac{A}{A'}$, l'expression $u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)$ devient égale à A^2; il vient

$$V = \frac{3M}{2A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \left[A^2 - u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$\times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Supposons maintenant l'ellipsoïde, non plus homogène, mais composé de couches homogènes; le potentiel de la couche e, de densité ρ, peut s'écrire, v étant le volume de l'ellipsoïde,

$$dV = \frac{3v}{2A^3}\rho\, d\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$\times \int_0^u \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1-\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ρ étant fonction de a ou a^2; posons

$$\rho\, da^2 = d\varphi(a^2)$$

ou

$$\rho\, d\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} - \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$= d\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1-\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right];$$

la fonction φ se déterminera par une quadrature, et nous aurons

$$V = \frac{3\upsilon}{2A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} d\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right]$$
$$\times \int_0^u \frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Intégrant encore par parties, nous trouvons immédiatement

$$V = \frac{3\upsilon}{2A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \left\{\varphi(A^2) - \varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right]\right\}$$
$$\times \frac{du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

formule qui comprend la première quand on suppose $\varphi(\alpha^2) = \rho\alpha^2$, ρ étant la densité supposée constante.

Pour avoir les composantes de l'attraction de E sur M, il suffit de calculer $\frac{\partial V}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial V}{\partial\beta}$, $\frac{\partial V}{\partial\gamma}$ et de les multiplier par le produit $f\mu$ de la constante de la loi de Newton et de la masse de M. Or V dépend de α, β, γ pour deux raisons : d'abord, parce que ces quantités entrent explicitement dans le terme

$$\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2u^2}\right)\right],$$

puis, parce qu'elles entrent implicitement dans la limite supérieure $\frac{A}{A'}$ de l'intégrale définie, car A' est une fonction de α, β, γ donnée par l'équation

$$\frac{\alpha^2}{A'^2} + \frac{\beta^2}{A'^2 + B^2 - A^2} + \frac{\gamma^2}{A'^2 + C^2 - A^2} = 1;$$

mais la dérivée de l'intégrale par rapport à $\frac{A}{A'}$, étant ce que devient la fonction de u qui multiplie du sous le signe $\int$ quand on y remplace u par $\frac{A}{A'}$, s'annule; car

$$\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$

devient, par cette substitution,

$$\varphi(A^2).$$

En remarquant que

$$\frac{d\varphi\left[u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]}{d\,u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)} = \rho,$$

on trouve donc

$$X = -\frac{3v}{A^3}\alpha\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{\rho\, u^2\, du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = -\frac{3v}{A^3}\beta\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{\rho\, u^2\, du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z = -\frac{3v}{A^3}\gamma\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{\rho\, u^2\, du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce sont les formules connues.

Les expressions trouvées, dans les deux cas, pour le potentiel, supposent le point M extérieur à l'ellipsoïde; il est facile de voir que, à condition de remplacer la limite supérieure par l'unité, elles subsistent quand le point M est sur l'ellipsoïde ou à son intérieur. La chose est évidente quand M est sur l'ellipsoïde. Supposons-le intérieur; par M faisons passer l'ellipsoïde homothétique; soient A_1, B_1, C_1 ses axes; le potentiel V se compose de la partie constante V_1 correspondant au volume compris entre les deux ellipsoïdes et du potentiel V_2 de l'ellipsoïde $A_1 B_1 C_1$.

Supposons la densité constante; le même raisonnement servirait dans le second cas. Nous avons d'abord

$$V_1 = \frac{3M}{A^3}\int_{A_1}^{A} a\,da \int_0^1 \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{3\rho}{2A^3}\int_0^1 (A^2 - A_1^2)\frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

puis

$$V_2 = \frac{3M}{2A^3}\int_0^1 \left[A_1^2 - u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$\times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

de sorte que

$$V = \frac{3M}{2A^3}\int^1 \left[A^2 - u^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{\gamma^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$\times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

C. Q. F. D.

L'équation générale des surfaces de niveau a l'une des deux formes

$$\int_0^{\frac{A}{A'}} \left[A^2 - u^2\left(x^2 + \frac{y^2}{1+\lambda^2 u} + \frac{z^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]$$
$$\times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{const.},$$

$$\int_0^{\frac{A}{A'}} \left\{ \varphi(A^2) - \varphi\left[u^2\left(x^2 + \frac{y^2}{1+\lambda^2 u^2} + \frac{z^2}{1+\lambda'^2 u^2}\right)\right]\right\} \times \frac{du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{const.}$$

Si la surface doit passer par un point extérieur, A′ est une fonction de x, y, z déterminée par l'équation

$$\frac{x^2}{A'^2} + \frac{y^2}{A'^2 + B^2 - A^2} + \frac{z^2}{A^2 + C^2 - A^2} = 1.$$

Si elle doit passer par un point situé sur l'ellipsoïde ou à son intérieur, la limite supérieure doit être remplacée par l'unité. Dans ce cas, les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes, si la densité est constante; mais il n'en est plus de même si elle est variable. Elles peuvent être algébriques ou transcendantes. Si l'on supposait, par exemple, $\varphi(a^2) = k(a^2)^2$, les surfaces de niveau seraient, comme on le voit, du quatrième degré.