NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUGUSTE GUTZMER

Notes sur un point de la théorie des séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 22-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__22_1>

NOTES SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES SÉRIES;

PAR M. AUGUSTE GUTZMER.

Dans ses *Remarques sur divers articles, concernant la théorie des séries* (1), M. Cesaro s'occupe de telles séries où le quotient de deux termes consécutifs peut devenir aussi grand que l'on voudra, bien que la série soit convergente. Peut-être n'est-il pas sans intérêt de constater

(1) *Voir* ce Recueil, 3e série, t. VII, p. 401 à 407.

qu'on connaît depuis longtemps des séries jouissant de cette propriété. Ainsi M. Stern dit, dans une Note de son *Lehrbuch der algebraischen Analysis* (¹) : *Wenn die Glieder theils zunehmen, theils abnehmen, lassen sie sich, wie sich von selbst versteht, bei der grossen Mannigfaltigkeit der hier möglichen Fälle, eine allgemeine Regel geben.* Cette petite remarque prouve que M. Stern a eu en vue, en effet, des séries jouissant de ladite propriété; mais il ne donne aucun exemple.

De même M. Eugène Catalan a considéré ces séries et il a consacré, dans son *Traité élémentaire des séries* (²), un paragraphe à *des séries à termes croissants et décroissants*. Dans les nos 40 et 41 de son Livre il dit : « Jusqu'à présent, nous avons supposé que les termes de la série proposée décroissent indéfiniment, du moins à partir de l'un deux ; et nous avons indiqué diverses règles au moyen desquelles on peut, dans tous les cas, reconnaître la convergence ou la divergence. Mais il peut arriver que le terme général u_n, tout en ayant pour limite zéro, soit exprimé par une fonction de n tantôt croissante et tantôt décroissante. Il paraît très difficile de trouver des règles simples, relatives à ce cas singulier. Nous nous contenterons d'énoncer la proposition suivante :

Théorème XV. — *Si les quantités*

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots,\quad u_n,$$

en nombre infini, peuvent former des groupes

$$\begin{aligned} g_1 &= u_1 + u_2 + \ldots + u_p, \\ g_2 &= u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q, \\ g_3 &= u_{q+1} + u_{q+2} + \ldots + u_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(¹) Leipzig, 1860, p. 91.
(²) Paris, 1860, p. 27.

qui diminuent indéfiniment (en valeur absolue); les séries

$$(U) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$(G) \qquad g_1 + g_2 + \ldots + g_i + \ldots$$

sont en même temps convergentes, divergentes ou indéterminées. De plus, si elles sont convergentes, elles ont même somme.

M. Catalan n'a pas énoncé le théorème démontré par M. E. Weyr ([1]). Mais il en a donné, dans le n° 42 de son Traité, trois exemples. En premier lieu, il considère la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots,$$

dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{(n + 1 + \cos n\pi)^2}.$$

En posant généralement

$$g_i = \frac{1}{(2i - 1)^2} + \frac{1}{(2i + 2)^2},$$

M. Catalan conclut que $g_i < \frac{1}{2(i-1)^2}$; par conséquent la série (G) est convergente et, d'après le théorème cité ci-dessus, de même la série (U). En second lieu, M. Catalan démontre, par un groupement analogue, la divergence de la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n - 1 + \cos n\pi},$$

et, en dernier lieu, il démontre, de la même manière, la

([1]) *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, t. VIII, p. 97 a 100.

convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sin \frac{n\pi}{2} - n^2 \cos \frac{n\pi}{2}}.$$

Cette remarque littéraire montre qu'on a déjà connu depuis longtemps des séries jouissant de ladite propriété; mais il restait dans la théorie de ces séries une lacune, remplie maintenant par les nouvelles recherches provoquées par les deux articles de M. Lerch [1]. Quant à ces derniers, ajoutons quelques remarques tirées d'une lettre que M. Lerch m'a adressée.

Dans les *Contributions à la théorie des séries infinies,* M. Lerch a employé la notion, un peu généralisée, du dérivé d'un ensemble de points (*Punktmenge*), dans le sens de M. G. Cantor, pour les éléments de la théorie des séries. En particulier, il a considéré l'ensemble caractérisé par la formule $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$, où les u_ν sont les termes positifs de la série infinie

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$$

Il a reconnu alors que la convergence de la série u n'a pas pour conséquence l'existence d'une limite de $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ (pour ν infini), mais que ce quotient peut surpasser même toute quantité donnée. Il a montré cela pour quelques cas particuliers qui sont de la forme

$$(1) \qquad a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots,$$

(1) *Contributions à la théorie des séries infinies* (*Comptes rendus des séances de la Société royale des Sciences de Bohême.* Prague, 13 mars 1885).

Remarque sur la Théorie des séries (*Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas,* t. VII, p. 79).

ou Σa_ν et Σb_ν sont des séries convergentes ; les exemples *plus simples* de M. Cesaro sont du même type.

M. Lerch m'écrit qu'il n'aurait pas publié ces séries-là s'il n'avait pas eu, pour son but, un autre exemple. Pour démontrer le théorème que la série $\Sigma \nu a_\nu x^{\nu-1}$ est convergente dans la même région que la série $\Sigma a_\nu x^\nu$, on s'appuie sur la remarque (¹) que le quotient de deux termes consécutifs, du moins à partir de l'un d'eux, *doit* être inférieur à l'unité, ce qui n'est pas vrai. Mais, si l'on n'avait pas d'autres séries que celles de la forme (1), on appliquerait seulement la démonstration à chacune des séries régulières

$$\begin{array}{l} a_0 \quad a_1 x^2 - a_2 x^4 + \quad . \\ b_0 x \quad b_1 x^3 \quad b_2 x^5 + \ \dots, \end{array}$$

pour conclure de la convergence de la série

$$a_0 \quad b_0 x + a_1 x^2 \quad b_1 x^3 - a_2 x^4 + b_2 x^5 - \ \dots$$

celle de la dérivée. C'est pourquoi M. Lerch a construit la série

$$(2) \qquad \sum_n \delta^{n \quad (\log n)} g^{\frac{1}{2} \log n \quad 1 + \log n} \qquad (0 < \delta < 1 < g),$$

ou $(\log n)$ désigne la partie entière du logarithme vulgaire de n ou le nombre des chiffres de n ; et c'est pourquoi celle-ci me semble être plus remarquable que celle de la forme (1).

En outre, les séries de la forme (1) et les séries analogues de la forme

$$\begin{array}{l} a_0^{(1)} \quad a_0^{(2)} \quad . \quad a_0^{(\nu)} \quad a_1^{(1)} - a_1^{(2)} + \quad . - a_1^{(\nu)} + . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_2^{(1)} - a_2^{(2)} - \ \dots - a_2^{(\nu)} - . \end{array}$$

(¹) *Voir*, par exemple HARNACK, *Die Elemente der Differential und Integralrechnung*, Leipzig 1881.

ont la propriété que, si le quotient de deux termes consécutifs peut devenir infiniment grand, il doit aussi devenir nécessairement infiniment petit. Cette circonstance ne s'offre pas dans la série (2) de M. Lerch.

La convergence de la série (2) n'exige pas, en effet, la condition $g < \frac{1}{\delta^2}$. Pour avoir un exemple d'une série irrégulière, il suffit de prendre

$$u_n = \delta^{n-(n)} g^{(n)^2} \qquad (0 < \delta < 1 < g),$$

où (n) est le nombre des chiffres de n. Mais, si n est de la forme $10^\nu - 1$, on aura $\frac{u_{n+1}}{u_n} = g^{2(n)+1}$; par conséquent, le quotient peut surpasser toute quantité donnée.