NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. FARJON

Solution géométrique des questions données au concours pour l'École polytechnique en 1882

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 187-197

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__187_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DES QUESTIONS DONNÉES AU CONCOURS POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1882;

Par M. F. FARJON.

On donne deux cercles se coupant en A *et* B. *Une conique quelconque passant par ces points et tangente aux deux cercles rencontre en* C *et* D *l'hyperbole équilatère qui a pour sommets* A *et* B :

1° *Démontrer que la droite* CD *passe par un centre de similitude des deux cercles donnés;*

2° *Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par* A *et* B, *sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de cercle;*

3° *Soit une conique satisfaisant à la question, démontrer que ses asymptotes passent par deux points fixes situés sur l'axe radical des deux cercles donnés.*

I. Lemme. — *Si une hyperbole équilatère a pour sommets les extrémités d'une corde d'un cercle, elle coupe ce cercle en deux autres points qui sont en ligne droite avec son centre.*

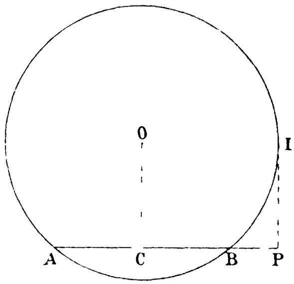
Soient la corde AB du cercle O (*fig.* 1), C son milieu, I l'une des intersections du cercle et de l'hyperbole équilatère qui a AB pour axe transverse; menons la perpendiculaire IP sur AB, on a

$$\overline{IP}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{CB}^2 = (PC + CB)(PC - CB) = PA \times PB;$$

donc PI est tangente à la circonférence et I sur le diamètre parallèle à AB.

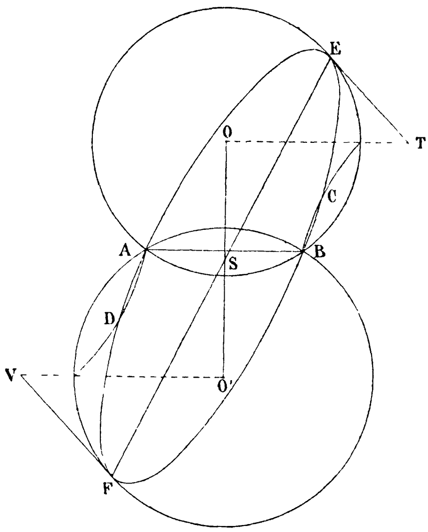
Cela posé, considérons (*fig.* 2) deux cercles O et O′ ayant AB pour corde commune, et traçons une conique

Fig. 1.



qui passe par AB et soit tangente aux deux cercles en E et F. Je remarque d'abord que les deux tangentes en

Fig. 2.



E et F sont parallèles : en effet, les deux cercles et la conique ayant une corde commune AB, les trois autres cordes d'intersection qui sont la droite à l'infini et les deux tangentes en E et en F doivent concourir en un même point : donc ces deux dernières sont parallèles. — Autrement, on sait que les bissectrices des angles que fait la corde AB, soit avec la tangente en E, soit avec la tangente en F, sont parallèles aux axes de la conique; il s'ensuit que ces deux tangentes sont parallèles entre elles.

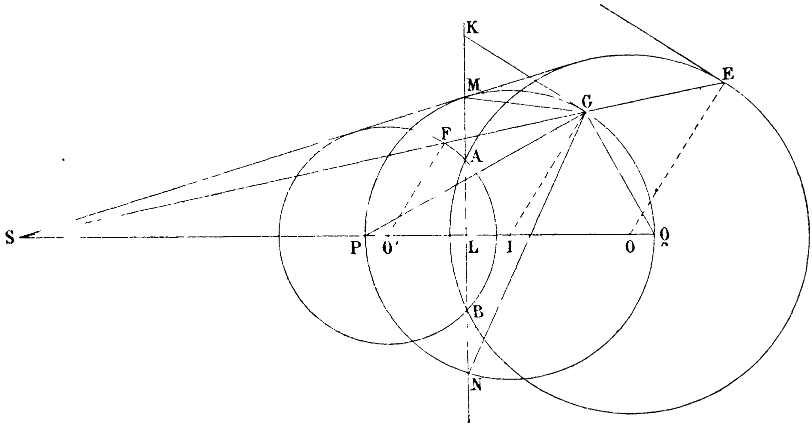
Il en résulte que la droite EF passe par l'un des centres de similitude des cercles O et O'.

Si l'on considère le système formé par la conique, le cercle O et l'hyperbole équilatère AB, leurs trois cordes d'intersection concourent au point T, intersection de la tangente en E et du diamètre de O parallèle à AB. De même, pour le système de la conique, du cercle O' et de l'hyperbole, les trois cordes d'intersection concourent au point V, intersection de la tangente en F et du diamètre de O' parallèle à AB. La corde d'intersection de la conique et de l'hyperbole est, par conséquent, la droite TV. Mais T et V, intersections de droites homologues deux à deux, sont eux-mêmes homologues : donc TV passe par le même centre de similitude que EF.

C. Q. F. D.

II. La droite EF est un diamètre de la conique, le centre de celle-ci est au milieu G de EF (*fig.* 3); OE et O'F sont parallèles, la droite GI menée parallèlement à ces dernières passe par le milieu I de OO' et est égale à $\frac{1}{2}(R+R')$ si le point S est le centre de similitude directe, et à $\frac{1}{2}(R-R')$ si S est le centre de similitude inverse. Le lieu du centre G se compose donc de deux cercles concentriques, ayant pour centre le milieu de la distance des centres et respectivement pour rayons la demi-somme et la demi-différence des rayons des deux cercles donnés. Le premier, homothétique aux deux cercles donnés par rapport au centre de similitude directe, est tangent aux tangentes communes extérieures aux points M et N où celles-ci rencontrent l'axe radical

Fig. 3.



AB. Le second est homothétique aux deux cercles donnés par rapport au centre de similitude inverse; la distance du point I à l'axe radical étant égale à $\frac{R^2 - R'^2}{2OO'}$, on voit d'ailleurs que ce second cercle ne peut rencontrer l'axe radical, tandis que le premier le coupe nécessairement.

III. Soit K le point où la tangente en G au cercle I rencontre la droite AB; les axes de la conique sont parallèles aux bissectrices de l'angle GKA ou de l'angle GIO dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du précédent. Si donc P et Q sont les points où le cercle I coupe la ligne des centres OO', les axes de la conique sont GP et GQ. Ainsi les axes de toutes les coniques qui ont leur centre sur une même circonférence I passent par deux points fixes qui sont les intersections de cette circonférence avec la ligne des centres.

Les axes GP et GQ sont les bissectrices de l'angle formé par les asymptotes; de plus, le milieu du segment intercepté par celles-ci sur l'axe radical coïncide avec le milieu L de AB. Nous avons donc, pour construire le triangle formé par les asymptotes et la corde AB, le sommet G du triangle, la bissectrice de l'angle en G et le milieu L du côté opposé : la perpendiculaire élevée sur AB en L coupe les bissectrices de l'angle G aux points où celles-ci rencontrent la circonférence circonscrite au triangle. Cette circonférence n'est donc autre, dans le cas présent, que celle du cercle I, et les deux asymptotes sont les droites GM et GN, qui joignent le centre G aux points d'intersection du cercle I et de l'axe radical AB. Les asymptotes de toutes les coniques qui ont leur centre sur le cercle I passent, par conséquent, par les deux points fixes M et N. C. Q. F. D.

On voit par là que toutes les coniques qui ont leur centre sur le cercle $\frac{1}{2}(R + R')$, correspondant au centre de similitude directe, sont des hyperboles. La courbe se réduit à deux droites, qui sont l'axe radical et la tangente commune aux deux cercles, lorsque le centre est en M ou en N. On remarquera qu'une transversale, issue du centre de similitude S, détermine deux hyperboles dont l'une est semblable à la conjuguée de l'autre.

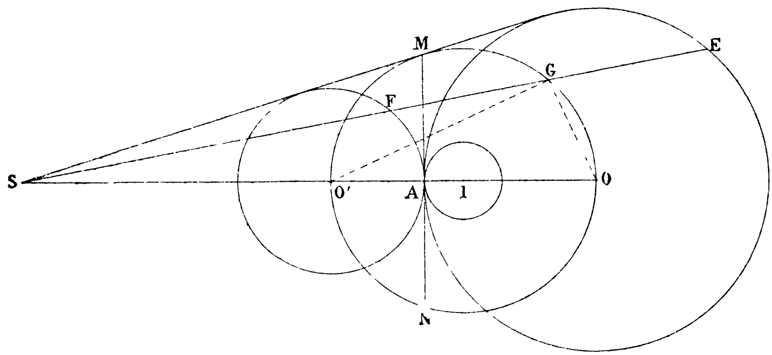
Toutes les coniques qui ont leur centre sur le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ sont au contraire des ellipses, puisque, ce cercle ne rencontrant pas l'axe radical, elles ont leurs asymptotes imaginaires.

Scolie. — Il existe deux coniques, satisfaisant à la double condition de passer par A et B et d'être tangentes à O et à O', qui ne rentrent pas dans les groupes précédents. Menons par A une tangente à O et par B une tangente à O′; l'ensemble de ces deux droites constitue une conique satisfaisant aux conditions, mais dont le centre n'est pas sur le cercle I et dont les asymptotes ne passent ni par M, ni par N. De même pour la tangente à O′ en A et la tangente à O en B. Ce sont deux solutions singulières.

IV. Examinons le cas particulier où les deux cercles O et O′ sont tangents extérieurement.

L'hyperbole équilatère se réduit alors à deux droites rectangulaires menées par le point de contact A (*fig.* 4)

Fig. 4.



et toutes les coniques correspondant au centre de similitude inverse sont les doubles cordes passant par le point A; ce sont des ellipses indéfiniment aplaties dont les centres sont sur le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$. Quant au cercle $\frac{1}{2}(R + R')$, il passe par les centres O et O′ : chacune des hyperboles répondant à la question a un double contact avec chacun des cercles O et O′, et l'on voit, en effet, que les axes de ces hyperboles passent par les deux centres.

Si les deux cercles O et O′ sont égaux, qu'ils soient sécants ou tangents, le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ se réduit à un point, et le cercle $\frac{1}{2}(R + R')$ a son centre sur l'axe radical; d'où il suit que toutes les ellipses de la figure sont concentriques, et que toutes les hyperboles sont équilatères, puisque leurs asymptotes sont rectangulaires.

On a supposé jusqu'ici dans les figures que les deux centres O et O' étaient situés de part et d'autre de l'axe radical. S'il en était autrement, les démonstrations et les conclusions qui précèdent resteraient les mêmes. Mais si les deux cercles sont tangents intérieurement, ce sont les hyperboles, correspondant au centre de similitude directe, qui se réduisent à des droites rayonnant autour du point de contact, et dont les centres sont situés sur le cercle $\frac{1}{2}(R + R')$ tangent aux deux cercles donnés. Quant aux ellipses correspondant au centre de similitude inverse, elles ont un double contact avec chacun des cercles O et O', et comme le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ est alors décrit sur la ligne des centres comme diamètre, on voit en effet que les axes de ces ellipses passent respectivement par les centres des deux cercles donnés.

Si les deux cercles deviennent égaux, ils se confondent : le cercle $\frac{1}{2}(R + R')$ est le cercle O lui-même, et le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ est le centre, qui est en même temps celui de toutes les ellipses qui ont un double contact avec O', dans les conditions de la figure.

V. A quoi correspondent les propositions qui précèdent, lorsque les deux cercles O et O' ne se coupent plus réellement? La corde commune AB est imaginaire, mais certains éléments, tels que les cercles $\frac{1}{2}(R + R')$ et $\frac{1}{2}(R - R')$, restent réels. L'interprétation est des plus simples.

Reprenons le lemme du § I. La longueur de la demicorde AC est déterminée par la relation

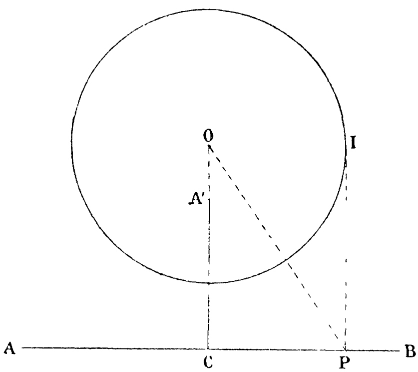
$$\overline{AC}^2 = R^2 - \overline{OC}^2.$$

Si AB est extérieure au cercle, AC est imaginaire et l'on a (*fig.* 5)

$$-\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 - R^2.$$

AB, au lieu d'être l'axe transverse de l'hyperbole équilatère, en devient l'axe imaginaire, et pour avoir un

Fig. 5.



sommet de la courbe, il faut prendre sur CO, à partir de C, une longueur $CA' = \sqrt{\overline{OC}^2 - R^2}$.

Cela posé, soit I le point d'intersection de l'hyperbole ainsi déterminée et du cercle; menons la perpendiculaire IP sur AB, on aura

$$\overline{IP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CA'}^2 = \overline{PO}^2 - R^2 :$$

donc IP est tangent au cercle, et le point I est sur le diamètre parallèle à AB.

Considérons actuellement les deux cercles O et O'. Si la corde commune AB est imaginaire, il est évident que les ellipses passant par A et B sont imaginaires; leurs points de contact avec les cercles O et O′ le sont aussi, mais la droite qui les joint est réelle et passe par le centre de similitude inverse. Il en est de même de la droite réelle qui joint les deux points d'intersection imaginaires de la courbe avec l'hyperbole équilatère définie ci-dessus. Les centres des ellipses sont réels et leur lieu est le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$; les axes sont connus, puisqu'ils passent par les points où le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ coupe la ligne des centres. Enfin ces ellipses ont des asymptotes réelles, puisque le cercle $\frac{1}{2}(R - R')$ coupe ici l'axe radical et que tous les couples d'asymptotes passent par ces points d'intersection.

Quant aux hyperboles passant par les points imaginaires A et B, elles ne cessent point d'être réelles, seulement elles ne coupent plus l'axe radical.

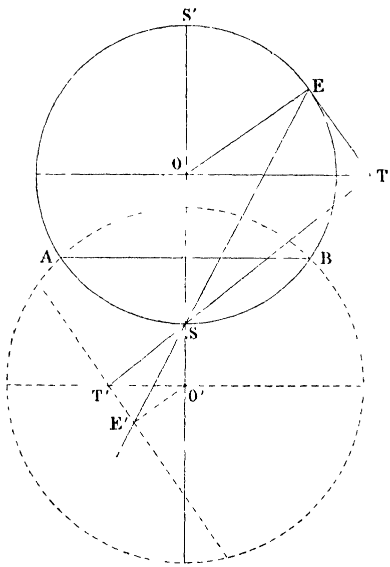
VI. Supposons que le rayon R′ croisse indéfiniment : des deux ellipses que détermine une sécante EF menée par le centre de similitude inverse, l'une, celle qui est tangente aux deux portions de circonférence extérieures l'une à l'autre, tendra vers une parabole; l'autre, celle qui est tangente aux deux portions de circonférence qui se pénètrent, tendra à se confondre avec le segment AB. De même, des deux hyperboles déterminées par une sécante EF menée par le centre de similitude directe, l'une, celle dont la branche passant par A et B est tangente au cercle O, tendra vers une parabole embrassant extérieurement ce cercle (tandis que la précédente lui était tangente intérieurement), et l'autre, celle dont la branche passant par A et B est tangente au cercle O′, tendra à se confondre avec les deux parties de AB extérieures au segment AB.

A la limite, le cercle O' se confond avec AB; on a ainsi ce théorème :

Si l'on trace une hyperbole équilatère ayant pour sommets deux points A *et* B *pris sur une circonférence, et une parabole passant par* A *et* B *et tangente, intérieurement ou extérieurement, à la circonférence, la corde commune de cette parabole et de cette hyperbole passe par l'une des extrémités du diamètre du cercle perpendiculaire à* AB.

Il est aisé de le vérifier directement. Soient (*fig.* 6) E

Fig. 6.



le point de contact, ET la tangente rencontrant en T le diamètre parallèle à AB, SS' le diamètre perpendiculaire à AB. Le diamètre de la parabole au point E, parallèle à l'axe, est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle ETO, ou parallèle à la bissectrice de l'angle S′OE : c'est donc la droite ES. Décrivons un cercle de rayon quelconque passant par A et B. Soit O′ son centre. Si l'on considère le système des deux cercles et de la parabole, on voit que la corde d'intersection de cette courbe et du cercle O′ sera parallèle à ET, d'où il suit que le milieu E′ de cette corde se trouvera au point de rencontre de son diamètre conjugué ES et de la parallèle O′E′ à OE ; la parallèle à AB menée par le centre O′ étant d'ailleurs la corde d'intersection du cercle O′ et de l'hyperbole, le point T′ où cette parallèle rencontre la corde commune à O′ et à la parabole appartiendra, comme T, à la corde commune de la parabole et de l'hyperbole. Mais les triangles OET et O′E′T′, SOE et SO′E′ sont semblables deux à deux ; on a donc

$$\frac{T'E'}{TE} = \frac{E'O'}{EO} = \frac{SE'}{SE} :$$

les trois points T′, S, T sont donc en ligne droite.

C. Q. F. D.