NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WORONTZOFF

Sur le développement en séries des fonctions implicites

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 140-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__140_1>

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS IMPLICITES;

PAR M. WORONTZOFF.

Soient

$$x = f_\nu(m), \qquad x = f_\nu(m_0) = x_0, \qquad x = f_\nu(0) = r$$

les racines respectives des équations

$$f(x) - m = 0, \qquad f(x) - m_0 = 0, \qquad f(x) = 0,$$

de sorte qu'on ait identiquement

$$f[f_\nu(m)] = m, \qquad f(x_0) = m_0, \qquad f(r) = 0;$$

et

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx$$

une fonction qu'il faut développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $m - m_0$.

En posant, pour abréger,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \mathrm{D}_x f(x), \qquad \frac{\mathrm{F}(x)}{f'(x)} = \Phi(x),$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{F}(x)}{f'(x)}\,df(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x)\,df(x) \\
&= \int_{m_0}^{m} \Phi[f_v(m)]\,df[f_v(m)] = \int_{m_0}^{m} \Phi[f_v(m)]\,dm.
\end{aligned}$$

Au moyen des formules bien connues

$$\int_{m_0}^{m} \Psi'(m)\,dm = \Psi(m) - \Psi(m_0),$$

$$\begin{aligned}
\Psi(m) - \Psi(m_0) = (m - m_0)\,\Psi'(m_0) &\\
+ \frac{(m - m_0)^2}{1.2}\,\Psi''(m_0) + \ldots &\\
+ \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\,\Psi^{n-1}(m_0) &\\
+ \frac{(m - m_0)^{n}}{1.2\ldots n}\,\Psi^{n}[m_0 + \theta(m - m_0)], &
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx &= \int_{m_0}^{m} \Phi[f_v(m)]\,dm \\
&= (m - m_0)\,\Phi[f_v(m_0)] + \frac{(m - m_0)^2}{1.2}\,\mathrm{D}_y\,\Phi[f_v(y)]_{y=m_0} + \ldots \\
&\quad + \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\mathrm{D}_y^{n-2}\,\Phi[f_v(y)]_{y=m_0} + \mathrm{R}_n \\
&= (m - m_0)\,\Phi(x_0) + \frac{(m - m_0)^2}{1.2}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}\,\mathrm{D}_z\right]\Phi(z)\right\}_{z=x_0} \\
&\quad + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}\,\mathrm{D}_z\right]^2\Phi(z)\right\}_{z=x_0} + \ldots \\
&\quad + \frac{(m - m_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{\left[\frac{1}{f'(z)}\,\mathrm{D}_z\right]^{n-2}\Phi(z)\right\}_{z=x_0} + \mathrm{R}_n,
\end{aligned}$$

où

$$R_n = \frac{(m - m_0)^n}{1.2.3\ldots n} \left\{ D_y^{n-1} \Phi[f_v(y)] \right\}_{y=m_0+\theta(m-m_0)}$$
$$= \frac{(m - m_0)^n}{1.2.3\ldots n} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{n-1} \Phi(z) \right\}_{z=x_0+\theta_1(x-x_0)=f_v[m_0+\theta(m-m_0)]}.$$

De cette formule, on déduit aussi la série suivante

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \int_{r}^{x} F(x)\,dx - \int_{r}^{x_0} F(x)\,dx$$
$$= \int_0^m \Phi[f_v(m)]\,dm - \int_0^{m_0} \Phi[f_v(m)]\,dm$$
$$= (m - m_0)\,\Phi(r) + \frac{(m^2 - m_0^2)}{1.2} \left\{ \frac{1}{f'(z)} D_z\,\Phi(z) \right\}_{z=r}$$
$$+ \frac{(m_3 - m_0^3)}{1.2.3} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^2 \Phi(z) \right\}_{z=r} + \ldots$$
$$+ \frac{(m^{n-1} - m_0^{n-1})}{1.2.3\ldots(n-1)} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{n-2} \Phi(z) \right\}_{z=r} + R'_n,$$

où

$$R'_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \left(m^n \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{n-1} \Phi(z) \right\}_{z=r+\theta(x-r)} \right.$$
$$\left. - m_0^n \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{n-1} \Phi(z) \right\}_{z=r+\theta_1(x_0-z)} \right).$$

Exemple. — En prenant les logarithmes népériens, posons

$$f(x) = \log x = m, \qquad F(x) = \log x.$$

Alors

$$\log x_0 = m_0, \qquad r = 1, \qquad \frac{F(x)}{f'(x)} = \Phi(x) = x \log x,$$
$$\left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^n \Phi(z) = (z\,D_z)^n z \log z = z(n + \log z),$$
$$[(z\,D_z)^n z \log z]_{z=r=1} = n,$$

$$R_n = \frac{(m - m_0)^n}{1.2.3\ldots n} ([x_0 + \theta(x - x_0)] \{ n - 1 + \log[x_0 + \theta(x - x_0)] \}),$$

$$R'_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} (m^n [1 + \theta(x - 1)] \{ n - 1 + \log[1 + \theta(x - 1)] \}$$
$$- m_0^n [1 + \theta_1(x_0 - 1)] \{ n - 1 + \log[1 + \theta_1(x_0 - 1)] \}).$$

---

(1) *Nouvelles Annales*, août 1888, p. 362.

Comme $R_{n=\infty} = 0$ et $R'_{n=\infty} = 0$ pour les valeurs finies de m et m_0, on a

$$\int_{x_0}^{x} \log x \, dx = x_0 \left[(m - m_0) \log x_0 + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} (1 + \log x_0) \right.$$

$$\left. + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3} (2 + \log x_0) + \frac{(m - m_0)^4}{1.2.3.4} (3 \log x_0) + \ldots \right]$$

$$= x_0 (m - m_0)^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{(m - m_0)}{1} \frac{1}{3} \right.$$

$$\left. + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} \frac{1}{4} + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3} \frac{1}{5} + \ldots \right]$$

$$+ x_0 \log x_0 \left[(m - m_0) + \frac{(m - m_0)^2}{1.2} + \frac{(m - m_0)^3}{1.2.3} + \ldots \right]$$

$$= x_0 [e^{m - m_0} (m - m_0) - (e^{m - m_0} - 1)] + x_0 \log x_0 (e^{m - m_0} - 1)$$

$$= (x \log x - x) - (x_0 \log x_0 - x_0),$$

et aussi

$$\int_{x_0}^{x} \log x \, dx = (m^2 - m_0^2) \frac{1}{2} + \frac{(m^3 - m_0^3)}{1} \frac{1}{3}$$

$$+ \frac{(m^4 - m_0^4)}{1.2} \frac{1}{4} + \frac{(m^5 - m_0^5)}{1.2.3} \frac{1}{5} + \ldots$$

$$= m^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{1} \frac{1}{3} + \frac{m^2}{1.2} \frac{1}{4} + \frac{m^3}{1.2.3} \frac{1}{5} + \ldots \right]$$

$$- m_0^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{m_0}{1} \frac{1}{3} + \frac{m_0^2}{1.2} \frac{1}{4} + \frac{m_0^3}{1.2.3} \frac{1}{5} + \ldots \right]$$

$$= [e^m m - (e^m - 1)] - [e^{m_0} m_0 - (e^{m_0} - 1)]$$

$$= [e^m (m - 1) + 1] - [e^{m_0} (m_0 - 1) + 1]$$

$$= (x \log x - x) - (x_0 \log x_0 - x_0).$$