

DE SAINT-GERMAIN

**Note sur la question de mécanique proposée
au concours d'agrégation en 1887**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 13-22

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__13_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA QUESTION DE MÉCANIQUE
PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1887 ;**

PAR M. DE SAINT-GERMAIN.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Rouché.

Puisque vous avez bien voulu me dire que je pourrais être utile à quelques lecteurs des *Nouvelles Annales* en

leur indiquant une solution du problème de Mécanique proposé à l'Agrégation en 1887, je vais montrer qu'on peut, par la voie la plus naturelle, arriver à cette solution et la pousser aussi loin que le permettent d'ordinaire les problèmes sur le mouvement des systèmes matériels.

Soit S un cône droit, homogène, dont le sommet O est immobile et dont chaque élément m est attiré vers un point fixe F par une force égale au produit de sa masse par sa distance au point F et par une constante ω^2 ; la hauteur OH du cône est égale à a , le rayon de base à $2a$, OF à $\frac{8}{5}a$; enfin, à l'instant initial, l'angle FOH est droit et S animé d'une vitesse de rotation $\omega\sqrt{2}$ autour de la bissectrice de cet angle. On demande de déterminer le mouvement ultérieur du cône et la réaction du point fixe; OM étant l'axe représentatif de la rotation instantanée, montrer que le point M décrit, dans le cône et dans l'espace, deux herpolhodies et chercher les quadriques correspondantes; indiquer la position relative des cônes lieux de l'axe instantané dans le solide S et dans l'espace.

Prenons trois axes rectangulaires fixes, OX_1, OY_1, OZ_1 , dont le dernier est dirigé suivant OF, et trois axes OX, OY, OZ liés invariablement au cône, OZ étant dirigé suivant OH. Nous chercherons d'abord les moments d'inertie A et C de S par rapport à OX ou OY et par rapport à OZ : ε étant la densité du cône, μ sa masse, on trouve bien aisément

$$A = \int_0^a 4\pi\varepsilon z^2 \left(\frac{4z^2}{4} - z^2 + \right) dz = \frac{8}{5} \pi\varepsilon a^3 = \frac{6}{5} \mu a^2,$$

$$C = \int_0^a 4\pi\varepsilon z^2 \frac{4z^2}{9} dz = A :$$

cette égalité simplifiera beaucoup les résultats que nous devons obtenir.

D'autre part, les attractions qui s'exercent suivant la loi donnée ont, comme on sait, une résultante R appliquée au centre de gravité G du cône et égale à $\mu\omega^2 GF$. Nous définirons la position du solide à l'aide des trois angles d'Euler θ, ψ, φ . Le couple qu'on introduit en transportant R parallèlement à elle-même au point O a son axe K dirigé dans le plan des $x_1 y_1$, faisant avec OX_1 l'angle $180^\circ + \psi$ et égal à

$$\begin{aligned} \mu\omega^2 GF \times OF \sin GFO \\ = \mu\omega^2 OF \times OG \sin GOF = \frac{6}{5} \mu\omega^2 a^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Il est facile de trouver les projections de l'axe K sur les axes mobiles et de former les équations d'Euler : en les divisant par $\frac{6}{5} \mu\omega^2 a^2$, elles deviennent

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{dq}{dt} = \omega^2 \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

La dernière donne immédiatement, eu égard aux conditions initiales,

$$(2) \quad r = \omega.$$

Pour obtenir d'autres intégrales, je rappelle les relations qui existent entre p, q, r et les dérivées des angles d'Euler,

$$(3) \quad \begin{cases} p = \sin \theta \sin \varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ q = \sin \theta \cos \varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin \varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos \theta \frac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Cela posé, éliminons ω^2 entre les deux premières

équations (1) :

$$\sin \varphi \frac{dp}{dt} + \cos \varphi \frac{dq}{dt} = 0 ;$$

multiplions par $\sin \theta dt$ et intégrons par parties; nous aurons

$$\begin{aligned} & \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \\ & - \int (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \cos \theta d\theta \\ & - \int (p \cos \varphi - q \sin \varphi) \sin \theta d\varphi = \text{const.} \end{aligned}$$

ou, en remplaçant p et q par leurs valeurs (3),

$$\sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} - \int \sin \theta \left(\cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) d\theta = \text{const.},$$

le coefficient de $\sin \theta d\theta$ est égal à r ou à ω et l'on a, en intégrant,

$$(4) \quad \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + \omega \cos \theta = \omega.$$

Ajoutons enfin les deux premières équations (1) après les avoir multipliées par $2p$ et $2q$

$$\begin{aligned} 2p \frac{dp}{dt} + 2q \frac{dq}{dt} &= -2\omega^2 \sin \theta (p \cos \varphi - q \sin \varphi) \\ &= -2\omega^2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt}; \end{aligned}$$

l'intégrale est, en tenant compte des données initiales,

$$(5) \quad p^2 + q^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} = \omega^2 (1 + 2 \cos \theta).$$

On eût pu écrire directement les intégrales (2), (4) et (5); les deux premières expriment que les projections de l'axe du couple des quantités de mouvement sur OZ et sur OZ_1 sont constantes; et, en effet, d'après une remarque de M. Resal, la vitesse de l'extrémité de

(17)

cet axe est représentée par K , perpendiculaire sur OZ et sur OZ_1 ; l'intégrale (5) est celle des forces vives, le travail de R étant, comme on sait,

$$\frac{1}{2} \mu \omega^2 \left[\overline{(GF)_0^2} - \overline{GF^2} \right] = \frac{6}{5} \mu \alpha^2 \omega^2 \cos \theta.$$

De l'équation (4) nous tirerons

$$(6) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{1 + \cos \theta};$$

et, en substituant cette valeur dans (5), nous aurons

$$(7) \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} - \omega^2 \frac{\cos \theta (2 + \cos \theta)}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta}.$$

Si l'on pose $\sin \frac{1}{2} \theta = \frac{u}{\sqrt{2}}$, on peut tirer de cette équation

$$\sin \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cos am} \left(\omega t \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \quad \left(\operatorname{mod} \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

mais, sans recourir aux fonctions elliptiques, on peut conclure des équations (6) et (7) que θ décroît d'abord depuis $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$ pour revenir à $\frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite, tandis que ψ croît constamment et sans limite. Sur une sphère décrite du point O comme centre avec a pour rayon, le lieu du point H sera une courbe formée, en général, d'une infinité de boucles tangentes au grand cercle situé dans le plan des $x_1 y_1$ et s'entre coupant au point qui est sur la partie positive de OZ_1 .

L'équation (2) et la dernière des équations (3) donnent

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \cos \theta \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{1 + \cos \theta} = \frac{d\psi}{dt};$$

on peut choisir les axes de sorte que φ et ψ s'annulent pour $t = 0$; ces deux angles seront constamment égaux, ce qui achève de nous faire connaître le mouvement du cône.

Il s'agit de calculer la réaction E exercée par le point fixe. Soit J l'accélération du centre de gravité; les forces extérieures R et E ayant pour résultante $J\mu$, on en pourra conclure la projection de E sur un axe quelconque. Je chercherai les composantes de E : 1° suivant la trace OU du plan OXY sur OX, Y₁; 2° suivant la droite OV perpendiculaire à OU dans le plan des xy ; 3° suivant OZ; c'est celles qu'on calculera le plus facilement si l'on se rappelle les formules de Rivals qui expriment les composantes de l'accélération d'un point x, y, z d'un solide, savoir :

$$J_x = p(px - qy - rz) - \omega^2 x + z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt},$$

$$J_y = q(px - qy - rz) - \omega^2 y + x \frac{dr}{dt} - z \frac{dp}{dt},$$

$$J_z = r(px + qy + rz) - \omega^2 z + y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt}.$$

Remplaçons x, y, z par les coordonnées $0, 0, \frac{3}{4}a$ du point G, $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ par leurs valeurs (1), p, q, r par leurs valeurs (3) et supposons $\varphi = 0$: nous aurons les projections de l'accélération du point G sur OU, OV, OZ :

$$J_u = \frac{3}{4} \alpha \omega \frac{d\theta}{dt},$$

$$J_v = \frac{3}{4} \alpha \omega \sin \theta \left(\omega + \frac{d\psi}{dt} \right),$$

$$J_z = -\frac{3}{4} \alpha \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \right).$$

Les projections de R sont

$$\begin{aligned} R_u &= 0, \\ R_v &= \frac{8}{5} \mu \omega^2 \alpha \sin \theta, \\ R_z &= \mu \omega^2 \alpha \left(\frac{8}{5} \cos \theta - \frac{3}{4} \right). \end{aligned}$$

On trouve, en définitive,

$$\begin{aligned} E_u &= \mu J_u - R_u = \frac{3}{4} \mu \alpha \omega \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{4} \mu \omega^2 \alpha \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - 2 \cos \theta}}{\cos \frac{1}{2} \theta}, \\ E_v &= -\frac{\mu \omega^2 \alpha \sin \theta}{20} \frac{2 + 17 \cos \theta}{1 + \cos \theta}, \\ E_z &= -\frac{31}{10} \mu \omega^2 \alpha \cos \theta, \end{aligned}$$

et la discussion de ces formules n'offre pas de difficultés.

Considérons maintenant l'axe OM qui représente la rotation instantanée ω de S et cherchons le lieu V du point M dans le cône. Les coordonnées relatives de ce point sont p, q, r : r restant égale à ω , la ligne V est située dans un plan Π qui coupe orthogonalement OZ en un point fixe P à la distance ω de l'origine; faisons $PM = \rho$, $MPM_0 = \lambda$ et cherchons comment varient ces coordonnées avec le temps. On a d'abord

$$\begin{aligned} \rho^2 &= p^2 + q^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} = \omega^2 (1 + 2 \cos \theta), \\ (8) \quad \cos \theta &= \frac{\rho^2 - \omega^2}{2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Différentiant la valeur de ρ^2 , élevant au carré et tenant compte de l'équation (7), on a

$$\rho^2 \frac{d\rho^2}{dt^2} = \omega^4 \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^6 (1 - \cos \theta) \cos \theta (1 + 2 \cos \theta)$$

ou, en remplaçant $\cos \theta$ par sa valeur (8),

$$(9) \quad \rho^2 \frac{d\sigma^2}{dt^2} = \frac{1}{4} (\rho^2 - \omega^2)(\rho^2 - 3\omega^2)(\rho^2 - 3\omega^2).$$

D'autre part, en vertu des équations (1), (3), (6), on a, pour le double de la vitesse aréolaire du point M,

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} - p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt} - \omega^2 \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \\ - \omega^2 \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = \omega^3 (1 - \cos \theta); \end{aligned}$$

remplaçant encore $\cos \theta$ par sa valeur (8), il vient

$$(10) \quad \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \omega (3\omega^2 - \rho^2),$$

M. Darboux a montré que la forme des équations (9) et (10) est caractéristique : elles définissent le mouvement d'un point qui décrit une herpolhodie, dans l'acceptation générale du mot. Soit un mouvement de Poinsoit défini par les équations

$$\frac{1}{a} \frac{dp'}{dt} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) q' r', \quad \dots :$$

les quantités $\sum \frac{p'^2}{a}$, $\sum \frac{p'^2}{a^2}$ ont des valeurs constantes h , g^2 , et la quadrique

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

touche un plan fixe aux divers points de l'herpolhodie correspondante; les variations des coordonnées ρ , λ du point de contact sont données par les équations

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{d\sigma^2}{dt^2} = h \left(\rho^2 - \frac{m}{a\sigma^2 - h} \right) \left(\rho^2 - \frac{m}{b\sigma^2 - h} \right) \left(\rho^2 - \frac{m}{c\sigma^2 - h} \right), \\ \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{h\sigma^2}{g} m, \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour abrégé,

$$m = -\frac{1}{hg^2} (ag^2 - h)(bg^2 - h)(cg^2 - h).$$

Il suffit d'identifier les dernières aux équations (9) et (10) pour avoir

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{4}, & g &= \frac{1}{2\omega}, & m &= -\frac{3}{4}\omega^2, \\ a &= -2\omega^2, & b &= 0, & c &= 2\omega^2. \end{aligned}$$

La quadrique qui correspond à l'herpolhodie V se réduit donc à un hyperboloïde à deux nappes infiniment aplati et la polhodie est un arc de l'hyperbole équilatère représentée par l'équation $z^2 - x^2 = 2\omega^2$. L'équation de l'herpolhodie V s'obtient en éliminant dt entre les équations (9) et (10); la forme de cette équation et le fait, aisé à établir, que V n'a pas de point d'inflexion, montrent que cette courbe ressemble à une hypocycloïde dont les festons toucheraient le cercle décrit du point P comme centre avec ω pour rayon, tandis que les points de rebroussement seraient sur un cercle de rayon $\omega\sqrt{3}$. Le rayon vecteur PM tourne constamment dans le sens positif : comme il varie entre ω et $\omega\sqrt{3}$, OM varie entre $\omega\sqrt{2}$ et 2ω , ce qui limite l'arc d'hyperbole qui joue le rôle de polhodie; quand OM atteint sa limite 2ω , le plan de l'hyperbole est perpendiculaire au plan Π .

Dans l'espace, les coordonnées du point M sont égales aux composantes de la rotation ϖ suivant les axes fixes,

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos\psi \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta \sin\psi \frac{d\varphi}{dt}, \\ q_1 &= \sin\psi \frac{d\theta}{dt} - \sin\theta \cos\psi \frac{d\varphi}{dt}, \\ r_1 &= \frac{d\psi}{dt} + \cos\theta \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Nous avons pu faire en sorte que les φ et ψ fussent constamment égaux; on aura donc

$$p_1 = p, \quad q_1 = -q, \quad r_1 = r;$$

il en résulte évidemment que, dans l'espace, le point M décrit une herpolhodie V_1 égale à V , située dans un plan Π_1 qui coupe orthogonalement l'axe OZ_1 en un point P_1 tel que OP_1 soit égal à ω ; seulement, le rayon vecteur P_1M tourne dans le sens négatif.

On pourrait donner au solide S le mouvement qu'il prend dans les conditions données en supposant qu'il soit lié invariablement à un cône (C) qui aurait O pour sommet, V pour base et faisant rouler (C) sur un cône égal (C_1) qui a V_1 pour base; les deux cônes seront constamment symétriques par rapport à leur plan tangent commun; toutefois, ils coïncideront quand leur génératrice commune passera par l'un des points de rebroussement de V et de V_1 ; la rotation instantanée est mesurée à chaque instant par la distance du point fixe au point de contact de V et de V_1 .