NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. MARCHAND

Étude du complexe proposé au concours général de 1885

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 122-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__122_1>

ÉTUDE DU COMPLEXE PROPOSÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885;

PAR M. E. MARCHAND.

Dans un précédent article, après avoir résolu la question telle qu'elle était énoncée, je me suis borné à indiquer sans démonstration quelques résultats complémentaires faciles à établir au moyen des coordonnées cartésiennes.

Je me propose aujourd'hui de parvenir aux mêmes conséquences en faisant appel presque exclusivement aux coordonnées homogènes de la ligne droite.

1. *Complexe spécial.* — Désignant toujours par α, β, γ, α', β', γ' les six coordonnées de la droite Δ, je trouverai pour expression de la plus courte distance δ entre cette droite et une droite Δ_1 faisant l'angle φ avec elle,

$$(1)\qquad \delta \sin\varphi = \alpha'_1\alpha + \beta'_1\beta + \gamma'_1\gamma + \alpha_1\alpha' + \beta_1\beta' + \gamma_1\gamma'.$$

Ceci rappelé, le complexe du premier ordre

$$(2)\qquad A\alpha + B\beta + C\gamma + A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma' = 0$$

sera dit spécial si son invariant est nul :

$$(3)\qquad AA' + BB' + CC' = 0.$$

L'identité (3) s'interprète géométriquement; elle indique que $\alpha_1 = A'$, $\beta_1 = B'$, $\gamma_1 = C'$, $\alpha'_1 = A$, $\beta'_1 = B$, $\gamma'_1 = C$ sont les six coordonnées d'une droite fixe Δ_1.

D'après (1) l'équation (2) signifie que toute droite Δ du complexe rencontre la droite Δ_1.

Un complexe spécial est l'ensemble des droites Δ qui rencontrent une droite fixe Δ_1.

A tout point correspond relativement à un complexe du premier ordre un plan que Chasles appelle *le plan focal du point*. Il est facile de vérifier que si un point mobile décrit une droite du complexe d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, le plan focal du point tourne autour de la droite d'une manière continue de $180°$. Il suffit pour cela de prendre cette droite comme axe des z.

Il n'y a d'exception que si le complexe est spécial. La droite Δ choisie parmi celles du complexe rencontre en N la droite Δ_1 définie par ce complexe.

Le plan focal d'un point quelconque de Δ est toujours le plan $\Delta\Delta_1$; le plan focal de N est indéterminé.

2. *Complexe tangent.* — Soit maintenant un complexe quelconque d'ordre m

$$(4) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = 0.$$

Pour une droite $\alpha, \beta, \gamma, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ du complexe on aura l'identité

$$(5) \qquad f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1) = 0.$$

Pour une droite voisine appartenant au complexe,

$$f(\alpha_1 - d\alpha_1, \ldots) = f(\alpha_1, \ldots) + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \ldots\right) + \ldots = 0.$$

Finalement on obtient

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - \ldots + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1} d\gamma'_1 = 0.$$

Ajoutant au premier membre de (6) le premier membre de (5) écrit sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1} \gamma'_1 = 0,$$

on trouve finalement

$$(7) \qquad \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial \beta_1} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} + \alpha' \frac{\partial f}{\partial \alpha'_1} + \beta' \frac{\partial f}{\partial \beta'_1} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial \gamma'_1} = 0,$$

$$(5) \qquad f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1) = 0.$$

Relativement à toute droite Δ_1 du complexe on trouve un pareil complexe linéaire (7) que j'appellerai *com-*

plexe tangent. Pour justifier cette dénomination, je vais démontrer le résultat suivant :

Le plan focal d'un point S de la droite Δ_1 du complexe (4) est le plan tangent le long de Δ_1 au cône du complexe de sommet S.

En effet, la droite Δ_1 étant définie par un point fixe $M_1(x, y, z, t)$ et par un point mobile $S(x', y', z', t')$, le plan focal de S relativement au complexe (7) sera défini par (7) en supposant la droite α, β, γ, α', β', γ' déterminée par les points $S(x, y', z', t')$ et $M(x, y, z, t)$.

Le plan tangent en M_1 au cône du complexe dont (4) est l'équation en coordonnées multiplanaires est précisément déterminé par les équations (7) et (5).

Corrélativement le foyer d'un plan P mené par la droite Δ_1 du complexe relativement au complexe tangent (7) est le point de contact de la courbe du complexe relative au plan P avec la droite Δ_1.

Les droites du complexe peuvent alors se diviser en deux groupes.

On a, d'une part, les droites ordinaires du complexe caractérisées par ce fait que le complexe tangent n'est pas spécial. Le plan tangent au cône du complexe tournera de 180° quand le sommet décrira la droite ordinaire du complexe de $-\infty$ à $+\infty$.

On a, d'autre part, les droites singulières D pour lesquelles le complexe tangent est spécial. Le plan tangent est le même pour tout cône ayant son sommet sur D; c'est le plan de la droite D et de la droite D' définie par le complexe tangent spécial. Il n'y a d'exception que pour le point N d'intersection de D et D'.

Ainsi on est conduit à adjoindre à la droite singulière D un plan singulier DD' et un point singulier N.

Corrélativement le point de contact avec la droite singulière est le point singulier N pour tout plan passant par cette droite singulière. Il n'y a d'exception que pour le plan singulier associé.

Exactement comme dans la théorie des points doubles des courbes algébriques on trouvera que pour le point singulier N il faut remplacer l'équation (7) par

$$(8)\qquad \left(\alpha\,\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\beta\,\frac{\partial}{\partial\beta_1}+\ldots\right)^2 f = 0.$$

Le cône admet la droite singulière comme droite double, les deux plans tangents le long de cette droite double étant représentés par l'équation (8).

Corrélativement la génératrice singulière est tangente double pour la courbe du complexe située dans le plan singulier associé. Les deux points de contact sont déterminés encore par l'équation (8).

Si le complexe est du second ordre, comme dans l'équation actuelle, l'équation (8) coïncide avec l'équation (4) du complexe. Le cône relatif au point singulier associé se décompose en deux plans; la conique relative au plan singulier associé se décompose en deux points.

On prouvera alors sans difficulté que les droites singulières du complexe sont les génératrices doubles des cônes du complexe admettant une génératrice double, ou encore les tangentes doubles des courbes du complexe qui en admettent.

Les points singuliers associés sont les sommets des cônes admettant une génératrice double; les plans singuliers associés, les plans des courbes admettant une tangente double.

Dans le cas actuel, chercher le lieu des points singuliers associés et l'enveloppe des plans singuliers associés revient à chercher d'une part le lieu des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans, d'autre part l'enveloppe des plans pour lesquels la courbe du complexe se réduit à deux points.

3. *Droites singulières.* — Les droites singulières seront définies par les équations

$$(9) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = 0,$$

$$(10) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha'} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial \beta'} - \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{\partial f}{\partial \gamma'} = 0.$$

Dans le cas actuel on aura les deux équations

$$(9) \qquad l\alpha'^2 + m\beta'^2 - n\gamma'^2 - \mathrm{K}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

$$(10) \qquad l\alpha\alpha' + m\beta\beta' + n\gamma\gamma' = 0.$$

On a une congruence du quatrième ordre et de quatrième classe.

L'équation (10) se reconnaît aussitôt. C'est le complexe des droites perpendiculaires à leur polaire relativement à toutes les surfaces du second degré

$$\frac{x^2}{l-\rho} + \frac{y^2}{m-\rho} + \frac{z^2}{n-\rho} = \sigma,$$

ρ et σ étant des paramètres arbitraires. L'une de ces surfaces est le cône

$$(11) \qquad \frac{x^2}{l} - \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0,$$

qui intervenait si heureusement dès le début du problème.

Ce résultat s'explique aussitôt. La conique du complexe relative à un plan P est homofocale à la section Σ de ce cône (11) par le plan P. Si donc la conique se réduit à deux points, ce qui n'arrive que pour les plans singuliers associés, ces deux points sont deux foyers de Σ; la droite singulière qui les joint est un axe; or on sait que tout axe de section plane est une droite perpendiculaire à sa polaire et que toute droite perpendiculaire à sa polaire est un axe de section plane.

Les propriétés connues du complexe (10) fournissent aussitôt des propriétés des droites singulières du complexe. Le rapport anharmonique intercepté sur une droite singulière par les trois plans de coordonnées et le plan de l'infini est constant. Ces quatre plans forment un tétraèdre tel que toute autre droite située dans le plan d'une face appartienne au complexe (10), que toute droite passant par un sommet appartienne au complexe (10).

Toutes les droites du complexe donné (9) situées dans un des plans de coordonnées seront singulières. Or on a vu que pour tout plan passant par l'origine on avait un cercle. Les droites du complexe situées dans un des plans de coordonnées envelopperont le cercle déterminé par ce plan de coordonnées dans la surface des ondes qui sera trouvée plus loin.

Toutes les droites du complexe (9) passant par l'origine ou parallèles à un des axes sont aussi des droites singulières.

4. *Congruence des droites singulières.* — Les droites singulières formant une congruence, une première méthode que je ne ferai qu'esquisser consisterait à leur appliquer les théorèmes généraux relatifs aux foyers, aux plans focaux et aux surfaces focales des congruences.

Je rappellerai que les foyers d'une congruence sont définis par (*Leçons sur la théorie générale des surfaces,* par G. Darboux, t. II, p. 3) ·

$$\begin{aligned} f(x, y, z, a, b) &= 0, \\ \varphi(x, y, z, a, b) &= 0, \end{aligned} \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial b}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial b}}.$$

Les projections d'une droite sur les trois plans de coordonnées ayant pour équations

$$\gamma y - \beta z = \alpha',$$
$$\alpha z - \gamma x = \beta',$$
$$\beta x - \alpha y = \gamma',$$

les équations (9) et (10) deviennent

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(\gamma y - \beta z)^2 + m(\alpha z - \gamma x)^2 \\ \quad + n(\beta x - \alpha y)^2 - \mathrm{K}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0, \end{array} \right.$$

$$(13) \quad l\alpha(\gamma y - \beta z) + m\beta(\alpha z - \gamma x) + n\gamma(\beta x - \alpha y) = 0.$$

A ces équations il faudra joindre

$$(14) \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \gamma}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma}}.$$

Or, si je regarde α, β, γ comme des coordonnées courantes et x, y, z comme des paramètres constants, les équations (12), (13) et (14) reviennent à exprimer que les coniques représentées par les deux premières équations sont tangentes.

Posant, suivant l'usage,

$$(12) \qquad S = 0,$$
$$(13) \qquad S' = 0,$$

on vérifie facilement que l'invariant Θ est nul. Alors la condition de contact (Salmon, *Sections coniques*, p. 573) se réduit à

$$\Delta(27\Delta\Delta' + 4\Theta'^3) = 0.$$

On a d'abord $\Delta = 0$, c'est-à-dire la condition pour que $S = 0$ représente deux droites. Effectuant le calcul, on trouverait la surface des ondes, que nous retrouverons plus loin par un calcul presque identique. On a en plus une surface d'ordre élevé

$$27\Delta\Delta' + 4\Theta'^3 = 0.$$

Cette surface rencontre la surface des ondes en des points

$$\Delta = 0, \qquad \Theta' = 0,$$

formant une courbe gauche d'ordre 16, sur lesquels l'attention se trouve tout naturellement attirée.

Mais je laisserai de côté ces considérations, qui ne se rattachent pas étroitement à la marche suivie jusqu'ici.

5. *Point et plan singuliers.* — Le complexe tangent est ici

$$l\alpha'\alpha'_1 + m\beta'\beta'_1 + n\gamma'\gamma'_1 - \mathrm{K}(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = 0.$$

Si ce complexe est spécial, la droite D′ qu'il représente a pour coordonnées $l\alpha'_1$, $m\beta'_1$, $n\gamma'_1$, $-\mathrm{K}\alpha_1$, $-\mathrm{K}\beta_1$, $-\mathrm{K}\gamma_1$, les coordonnées de la droite singulière D étant α_1, β_1, γ_1, α'_1, β'_1, γ'_1.

Alors, si x, y, z sont les coordonnées rectilignes du point N intersection de D et de D′, on aura les deux séries d'équations

$$(16)\qquad \begin{cases} \gamma y - \beta z = \alpha', \\ \alpha z - \gamma x = \beta', \\ \beta x - \alpha y = \gamma', \end{cases}$$

$$(17)\qquad \begin{cases} n\gamma' y - m\beta' z = -\mathrm{K}\alpha, \\ l\alpha' z - n\gamma' x = -\mathrm{K}\beta, \\ m\beta' x - l\alpha' y = -\mathrm{K}\gamma, \end{cases}$$

$$(18)\qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0,$$

$$(19)\qquad \alpha x + \beta y - \gamma z = 0.$$

Les équations (18) et (19) déterminent des valeurs proportionnelles de x, y, z. Il est d'ailleurs facile de vérifier que les équations (16), (17), (18) et (19) sont vérifiées par

$$(20)\qquad x = \beta\gamma' - \gamma\beta', \qquad y = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \qquad z = \alpha\beta' - \beta\alpha',$$

en supposant, bien entendu,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Les formules corrélatives qui déterminent le plan singulier associé sont

$$(21)\qquad \begin{cases} \gamma' v - \beta' w = \alpha, \\ \alpha' w - \gamma' u = \beta, \\ \beta' u - \alpha' v = \gamma, \end{cases}$$

$$(22)\qquad \begin{cases} -K(\gamma v - \beta w) = l\alpha', \\ -K(\alpha w - \gamma u) = m\beta', \\ -K(\beta u - \alpha v) = n\gamma', \end{cases}$$

$$(23)\qquad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

$$(24)\qquad l\alpha' u + m\beta' v + n\gamma' w = 0.$$

Ici encore il est facile de constater que l'on vérifie toutes les équations, en posant

$$(25)\qquad -Ku = n\beta\gamma' - m\gamma\beta'.$$

Si l'on multiplie par α, β, γ les premiers membres des équations (21) et qu'on ajoute, il vient

$$(26)\qquad ux + vy + wz + 1 = 0.$$

On vérifie donc ce résultat, évident par ce qui précède, que le point singulier est dans le plan associé.

De (26) on tire aussitôt

$$(27)\qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz + x\,du + y\,dv + z\,dw = 0.$$

Je différentie totalement les équations (16) et (17) et je les ajoute multipliées par les facteurs écrits en regard

$$
\begin{array}{lr}
\gamma\,dy - \beta\,dz + y\,d\gamma - z\,d\beta = d\alpha', & -l\alpha',\\
\alpha\,dz - \gamma\,dx + z\,d\alpha - x\,d\gamma = d\beta', & -m\beta',\\
\beta\,dx - \alpha\,dy + x\,d\beta - y\,d\alpha = d\gamma', & -n\gamma',\\
n\gamma'\,dy - m\beta'\,dz + ny\,d\gamma' - mz\,d\beta' = -\mathrm{K}\,d\alpha, & \alpha,\\
l\alpha'\,dz - n\gamma'\,dx + lz\,d\alpha' - nx\,d\gamma' = -\mathrm{K}\,d\beta, & \beta,\\
m\beta'\,dx - l\alpha'\,dy + mx\,d\beta' - ly\,d\alpha' = -\mathrm{K}\,d\gamma. & \gamma.
\end{array}
$$

J'obtiens

$$
(28)\qquad \left\{\begin{array}{l} +2\mathrm{K}(u\,dx + v\,dy + w\,dz)\\ \quad +\mathrm{K}(x\,du + y\,dv + z\,dw) = 0. \end{array}\right.
$$

Des équations (27) et (28) on tire

$$
(29)\qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0,
$$

$$
(30)\qquad x\,du + y\,dv + z\,dw = 0.
$$

La première montre que la surface lieu des points associés admet le plan associé comme plan tangent; la deuxième montre que l'enveloppe des plans singuliers associés admet le point singulier associé comme point de contact avec son enveloppe.

On voit donc qu'il existera une surface singulière lieu des points singuliers et enveloppe des plans singuliers à laquelle toutes les droites singulières seront tangentes.

Il est facile de se rendre compte que la même surface sera aussi le lieu des points en lesquels peut se décomposer la conique du complexe et l'enveloppe des plans auxquels peut se réduire le cône.

En effet, si par la droite singulière on mène les deux plans qui forment le cône relatif au point singulier N, la courbe du complexe relative à l'un de ces plans se compose évidemment du point N et d'un autre point. C'est un plan singulier, tangent par suite à la surface singulière. De même le cône relatif à l'un des points M en lesquels se décompose la conique située dans un plan singulier contenant déjà toutes les droites du plan singulier passant par M se réduit à ce plan et à un autre plan.

Il paraît dès lors naturel de penser que la surface singulière sera de quatrième ordre et de quatrième classe. Une droite singulière rencontre en effet la surface au point singulier associé qui doit compter double et aux deux points auxquels se réduit la conique correspondante au plan singulier associé. Par la droite singulière on peut mener quatre plans tangents dont deux confondus avec le plan singulier et les deux autres fournis par les deux plans auxquels se réduit le cône qui a pour sommet le point singulier associé.

Je ne m'arrêterai pas à établir rigoureusement ce résultat par la Géométrie et j'arrive aussitôt à la recherche de l'équation de la surface singulière.

6. *Surface singulière.* — Éliminant α, β, γ, α', β', γ' entre les six équations homogènes (16) et (17), on aurait l'équation de la surface singulière sous forme d'un déterminant du sixième ordre.

Je tirerai les valeurs de α, β, γ des équations (17) et, portant dans (16), j'aurai trois équations de la forme

$$(31) \qquad \alpha'[l(y^2+z^2)-\mathrm{K}]-\beta' mxy-\gamma' nzx=0.$$

Posant

$$l\alpha'=\mathrm{X}, \qquad m\beta'=\mathrm{Y}, \qquad n\gamma'=\mathrm{Z},$$

les équations (31) sont les dérivées partielles de la forme quadratique

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}\mathrm{X}^2+\mathrm{A}'\mathrm{Y}^2+\mathrm{A}''\mathrm{Z}^2+2\mathrm{B}\mathrm{Y}\mathrm{Z}+2\mathrm{B}'\mathrm{Z}\mathrm{X}+2\mathrm{B}''\mathrm{X}\mathrm{Y}=0 \\ &\mathrm{A}=y^2+z^2-\frac{\mathrm{K}}{l}, \qquad \mathrm{B}=-yz. \end{aligned} \right.$$

Le discriminant de cette forme quadratique doit être nul. Je l'écrirai sous la forme de Jacobi

$$\frac{\frac{B'B''}{B}}{A - \frac{B'B''}{B}} + \ldots + 1 = 0.$$

On trouve la forme bien connue de l'équation de la surface des ondes

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-\frac{K}{l}} \\ &+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-\frac{K}{m}} \\ &+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-\frac{K}{n}} - 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on avait au contraire éliminé α', β', γ' entre les équations (16) et (17), on obtiendrait trois équations du premier degré en α, β, γ qui ne seraient autre chose que les dérivées partielles de la forme quadratique (12) trouvée plus haut. Le rapprochement avec le calcul indiqué par la théorie des foyers des congruences est très net, mais on trouverait une forme moins simple pour la surface des ondes

$$(34)\qquad \frac{mnx^2}{T-Kl} + \frac{nly^2}{T-Km} + \frac{lmz^2}{T-Kn} - 1 = 0,$$

$$T = lmn\left(\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n}\right).$$

$T = 0$ est le cône (11) qui avec la sphère de rayon nul $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ compose le cône asymptote de la surface des ondes.

Opérant de même avec les équations (21) et (22), on trouve les deux formes corrélatives de l'équation de la surface des ondes :

$$(35)\qquad \frac{u^2}{\rho^2 - l} + \frac{v^2}{\rho^2 - m} + \frac{w^2}{\rho^2 - n} - 1 = 0,$$

$$\rho^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

$$(36)\qquad \frac{lu^2}{KU - mn} + \frac{mv^2}{KU - nl} + \frac{nw^2}{KU - lm} - 1 = 0,$$

$$U = lu^2 + mv^2 + nw^2.$$

7. *Conséquences géométriques.* — Je me borne au cas où l'on a une véritable surface des ondes :

$$l > 0, \qquad m > 0, \qquad n > 0.$$

Prenons un point M de la surface des ondes et le plan tangent T en ce point. Je dis que la droite singulière unique qui passe par le point M dans le plan T est perpendiculaire à la droite OM qui joint le point de contact M à l'origine des coordonnées. En effet, on a vu dans la première Partie que les plans tangents menés par OM au cône (11) étaient deux plans de section circulaire; OM est donc un axe. Lorsqu'on a deux plans au lieu d'un vrai cône, ces deux plans doivent former un des deux autres systèmes de plans cycliques qui résultent forcément du premier système. L'intersection de ces deux plans ou la droite singulière est aussi un axe; elle est perpendiculaire à OM. Cette perpendiculaire D menée à OM dans le plan T est tangente à la parabole (10) du complexe associé. Elle rencontre la surface des ondes en deux autres points qui sont foyers de la section du cône (11) par le plan T; ce sont en effet les deux points en lesquels se décompose la conique du complexe qui est homofocale de la section du cône.

On peut mener par D deux autres plans tangents à la surface : ce sont les deux plans de l'un des deux systèmes cycliques résultant d'un premier système cyclique formé par les plans tangents menés par OM au cône (11). Le cône étant ici imaginaire, les plans tangents sont imaginaires et alors, des deux systèmes cycliques entre lesquels il faut choisir, l'un est réel, l'autre imaginaire.

D'après la forme connue de la surface des ondes, si le point M est sur la nappe intérieure, les deux points d'intersection de D avec la surface sont réels : la conique se réduit aux deux foyers réels. Par contre, les deux plans tangents menés par D étant imaginaires, le cône du sommet M se réduit aux deux plans cycliques imaginaires. Si le point M est sur la nappe extérieure, les deux foyers sont imaginaires et les plans cycliques réels. On remarquera en passant les relations étroites qui existent entre la surface des ondes et les foyers des sections planes du cône, lequel deviendrait un cône quelconque du second ordre, si on laissait arbitraires les signes de l, m, n.

Toute section menée par une droite singulière D est tangente à cette droite au point singulier M. D'ailleurs, dans un plan quelconque, il y a quatre droites singulières définies par les équations (9) et (10) comme tangentes communes à la conique du complexe et à une parabole. La conique du complexe relative à un plan quelconque est tangente en quatre points à la section de la surface des ondes par le plan. De même, tout cône du complexe est tangent en quatre points à la surface singulière. Cette propriété de la conique du complexe d'être tangente à la surface singulière en chacun des quatre seuls points où elle la rencontre s'applique évidemment à tout complexe du second ordre.

Si l'on coupe la surface des ondes par un plan passant par l'origine des coordonnées, la courbe du complexe correspondante est un cercle C. La surface des ondes est coupée suivant deux courbes : l'une intérieure, I ; l'autre extérieure E.

Les tangentes menées au cercle C par un point M de E sont évidemment les intersections du plan du cercle avec les deux plans auxquels se réduit le cône de sommet M, puisque ces droites appartiennent au complexe. Ces tangentes sont réelles puisque les deux plans sont réels. Les tangentes seraient par contre imaginaires pour un point quelconque de la courbe intérieure I. Alors la courbe I est intérieure au cercle C et la courbe E lui est extérieure. Les droites du complexe situées dans le plan étant les tangentes au cercle C rencontrent E en deux points réels et I en deux points imaginaires.

Comme toute droite du complexe appartient à un plan passant par l'origine, on voit que toutes les droites du complexe pénètrent entre les deux nappes de la surface des ondes. La nappe intérieure de la surface des ondes forme un noyau solide à l'intérieur duquel ne pénètre aucune droite du complexe.

Les courbes E et I se confondent pour les plans qui touchent la surface des ondes en tous les points d'un cercle. Ce cercle de contact est donc une conique du complexe ; son plan coupe le cône (11) suivant un cercle qui a même centre que le cercle de contact. Corrélativement les cônes tangents aux points doubles sont des cônes du complexe ; on connaît donc leurs plans de section circulaire, et par suite leurs axes.

Pour être complet, il resterait à chercher l'équation de la surface singulière en coordonnées de droite, ce qui conduirait à un grand nombre de propriétés intéressantes appartenant pour la plupart au complexe général du second ordre.