F. GOMES TEIXEIRA

Sur l'intégrale $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)dx$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 8 (1889), p. 120-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__120_0>

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'École Polytechnique de Porto.

L'intégrale $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$, qui a une grande importance dans la théorie de l'intégration des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$, a été obtenue par M. Hermite dans son savant *Cours d'Analyse*, p. 344, au moyen d'une construction géométrique, et ensuite dans *Jornal de Sciencias mathematicas*, t. II, p. 65, au moyen d'une méthode entièrement élémentaire. Je me propose ici de considérer la même intégrale, pour l'obtenir par une autre méthode aussi élémentaire, en la faisant dépendre de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)\,du}{1+[f(x)]^2},$$

Soit $\alpha = a + ib$. On a

$$\begin{aligned}
&\int \cot(x-a-ib)\,dx \\
&= \int \frac{\cos(x-a-ib)}{\sin(x-a-ib)}\,dx \\
&= \int \frac{\cos(x-a)\cos ib - \sin(x-a)\sin ib}{\sin(x-a)\cos ib - \cos(x-a)\sin ib}\,dx,
\end{aligned}$$

où l'on doit remplacer $\sin ib$ et $\cos ib$ par leurs valeurs

$$\cos ib = \frac{e^{-b}+e^{b}}{2},$$

$$\sin ib = \frac{e^{-b}-e^{b}}{2i},$$

ce qui donne

$$\int \cot(x-a)\,dx$$
$$= \int \frac{(e^{-b}+e^{b})\cos(x-a) - i(e^{-b}-e^{b})\sin(x-a)}{(e^{-b}+e^{b})\sin(x-a) + i(e^{-b}-e^{b})\cos(x-a)}\,dx$$
$$= \int \frac{2\sin 2(x-a)\,dx}{e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)}$$
$$-\, i \int \frac{(e^{-2b}-e^{2b})\,dx}{(e^{-b}+e^{b})^2\sin^2(x-a)+(e^{-b}-e^{b})^2\cos^2(x-a)}$$
$$= \frac{1}{2}\log[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos(x-a)]$$
$$-\, i \int \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\tan g(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\tan g(x-a)\right]^2}.$$

Mais, comme on a $e^{-2b}+e^{2b} > 2$, la fonction

$$\log[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)]$$

a une branche réelle qui prend des valeurs égales dans les points $x=0$ et $x=\pi$. Donc

$$\int_0^\pi \cot(x-a)\,dx = -\, i \int_0^\pi \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\tan g(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}-e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\tan g(x-a)\right]^2}.$$

L'intégrale qui entre dans le second membre de cette égalité a la forme

$$\int_0^\pi \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2},$$

et nous allons par conséquent lui appliquer le théorème

$$\int_0^\pi \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2} = \operatorname{arc\,tang} f(\pi) - \operatorname{arc\,tang} f(0) - (n+m)\pi,$$

où n représente le nombre de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du positif au négatif, et m le nombre de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du négatif au positif.

En y posant donc

$$f(x) = \frac{e^{-b} + e^{b}}{e^{-b} - e^{b}} \operatorname{tang}(x - a),$$

et en remarquant que, quand x varie depuis zéro jusqu'à π, $\operatorname{tang}(x - a)$ passe une seule fois par l'infini en allant du positif au négatif et que la fraction

$$\frac{e^{-b} + e^{b}}{e^{-b} - e^{b}}$$

est positive ou négative suivant que $b < 0$ ou > 0, on voit que $f(x)$ passe une seule fois par l'infini, en allant du positif au négatif quand $b < 0$, et du négatif au positif quand $b > 0$.

Nous avons donc

$$\int_0^\pi \cot(x - \alpha)\, dx = -i\pi$$

quand $b > 0$, et

$$\int_0^\pi \cot(x - \alpha)\, dx = -i\pi$$

quand $b < 0$.