

F. GOMES TEIXEIRA

Sur l'intégrale $\int_0^\pi \cot(x - \alpha) dx$

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 120-122

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__120_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\pi \cot(x - \alpha) dx$;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,

Professeur à l'École Polytechnique de Porto.

L'intégrale $\int_0^\pi \cot(x - \alpha) dx$, qui a une grande importance dans la théorie de l'intégration des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$, a été obtenue par M. Hermite dans son savant *Cours d'Analyse*, p. 344, au moyen d'une construction géométrique, et ensuite dans *Jornal de Sciencias mathematicas*, t. II, p. 65, au moyen d'une méthode entièrement élémentaire. Je me propose ici de considérer la même intégrale, pour l'obtenir par une autre méthode aussi élémentaire, en la faisant dépendre de l'intégrale

$$\int_{x_0}^x \frac{f'(x) du}{1 + [f(x)]^2},$$

Soit $\alpha = a + ib$. On a

$$\begin{aligned} & \int \cot(x - a - ib) dx \\ &= \int \frac{\cos(x - a - ib)}{\sin(x - a - ib)} dx \\ &= \int \frac{\cos(x - a) \cos ib - \sin(x - a) \sin ib}{\sin(x - a) \cos ib - \cos(x - a) \sin ib} dx, \end{aligned}$$

où l'on doit remplacer $\sin ib$ et $\cos ib$ par leurs valeurs

$$\cos ib = \frac{e^{-b} + e^b}{2},$$

$$\sin ib = \frac{e^{-b} - e^b}{2i},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 & \int \cot(x-a) dx \\
 &= \int \frac{(e^{-b} + e^b) \cos(x-a) - i(e^{-b} - e^b) \sin(x-a)}{(e^{-b} + e^b) \sin(x-a) + i(e^{-b} - e^b) \cos(x-a)} dx \\
 &= \int \frac{2 \sin 2(x-a) dx}{e^{-2b} + e^{2b} - 2 \cos 2(x-a)} \\
 &\quad - i \int \frac{(e^{-2b} - e^{2b}) dx}{(e^{-b} + e^b)^2 \sin^2(x-a) + (e^{-b} - e^b)^2 \cos^2(x-a)} \\
 &= \frac{1}{2} \log [e^{-2b} + e^{2b} - 2 \cos(x-a)] \\
 &\quad - i \int \frac{d \left[\frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a) \right]}{1 + \left[\frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a) \right]^2}.
 \end{aligned}$$

Mais, comme on a $e^{-2b} + e^{2b} > 2$, la fonction

$$\log [e^{-2b} + e^{2b} - 2 \cos 2(x-a)]$$

a une branche réelle qui prend des valeurs égales dans les points $x = 0$ et $x = \pi$. Donc

$$\int_0^\pi \cot(x-a) dx = -i \int_0^\pi \frac{d \left[\frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a) \right]}{1 + \left[\frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a) \right]^2}.$$

L'intégrale qui entre dans le second membre de cette égalité a la forme

$$\int_0^\pi \frac{f'(x) dx}{1 + [f(x)]^2},$$

et nous allons par conséquent lui appliquer le théorème

$$\int_0^\pi \frac{f'(x) dx}{1 + [f(x)]^2} = \operatorname{arc tang} f(\pi) - \operatorname{arc tang} f(0) - (n + m)\pi,$$

où n représente le nombre de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du positif au négatif, et m le nombre

de fois que $f(x)$ passe par l'infini en allant du négatif au positif.

En y posant donc

$$f(x) = \frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x - a),$$

et en remarquant que, quand x varie depuis zéro jusqu'à π , $\operatorname{tang}(x - a)$ passe une seule fois par l'infini en allant du positif au négatif et que la fraction

$$\frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b}$$

est positive ou négative suivant que $b < 0$ ou > 0 , on voit que $f(x)$ passe une seule fois par l'infini, en allant du positif au négatif quand $b < 0$, et du négatif au positif quand $b > 0$.

Nous avons donc

$$\int_0^\pi \cot(x - a) dx = -i\pi$$

quand $b > 0$, et

$$\int_0^\pi \cot(x - a) dx = -i\pi$$

quand $b < 0$.