NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. MARCHAND

Solution de la question proposée au concours général de 1885

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 8-14

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__8_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885;

PAR M. E. MARCHAND,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Caen.

Étant donné un hyperboloïde à une nappe, on considère toutes les cordes D *de cette surface qui sont vues du centre sous un angle droit et l'on demande :*

1° *L'équation du cône lieu géométrique des cordes* D *qui passent par un point* S, *ainsi que les positions du point* S *pour lesquelles le cône est de révolution;*

2° *La courbe à laquelle sont tangentes toutes les cordes* D *situées dans un plan donné* P, *ainsi que les positions du plan* P *pour lesquelles cette courbe est une parabole ou une circonférence de cercle.*

Remarque préliminaire. — Il est évident que l'énoncé est équivalent au suivant :

Étudier le complexe des cordes D *qui sont vues du centre sous un angle droit.*

On sait d'ailleurs que, pour traiter de pareilles questions, il est préférable de définir la droite par ses six coordonnées homogènes, dont je vais rappeler la signification.

Posant, pour abréger,

$$[uv_1] = uv_1 - vu_1,$$

les six coordonnées homogènes de la droite

$$(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$$

seront définies par deux plans

$$(u, v, w, p), \quad (u_1, v_1, w_1, p_1)$$

passant par la droite, ou par deux points

$$(x, y, z, t), \quad (x_1, y_1, z_1, t_1)$$

situés sur la droite, au moyen des équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha = [vw_1] = [xt_1], \\ \beta = [wu_1] = [yt_1], \\ \gamma = [uv_1] = [zt_1], \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha' = [pu_1] = -[yz_1], \\ \beta' = [pv_1] = -[zx_1], \\ \gamma' = [pw_1] = -[xy_1]. \end{cases}$$

Tout complexe sera défini par une équation homogène

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = 0,$$

laquelle d'ailleurs peut, en général, être mise sous une infinité de formes différentes, grâce à la relation identique

$$(3) \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Par exemple, prenant l'équation d'une quadrique sous la forme

$$(4) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 - K = 0,$$

on trouve facilement que le complexe des droites D vues du centre sous un angle droit a pour équation

$$(5)\qquad \begin{gathered} l\alpha'^2 + m\beta'^2 + n\gamma'^2 - K(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = 0, \\ l = b + c, \qquad m = c + a, \qquad n = a + b. \end{gathered}$$

1. D'après les relations (1) et (2), si l'on désigne par x_1, y_1, z_1, t_1 les coordonnées du sommet S du cône du complexe, ce cône aura pour équation

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} & l[yz_1]^2 + m[zx_1]^2 + n[xy_1]^2 \\ & \quad = K[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre, égalé à zéro, représente le système des deux plans tangents menés du point S au cône

$$(7)\qquad \frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0.$$

lequel cône est l'enveloppe des plans passant par le centre de la quadrique et la coupant suivant une hyperbole équilatère. Ce cône, imaginaire dans le cas de l'ellipsoïde, n'est réel dans le cas de l'hyperboloïde que si le plus grand angle au sommet du cône asymptote de la quadrique donnée est obtus.

Le second membre représente une sphère de rayon nul et de centre S.

Si donc on fait varier K d'une manière arbitraire, ce qui revient à adjoindre à la quadrique de l'énoncé toutes les quadriques concentriques et homothétiques, l'équation (6) représente une famille de cônes homocycliques. Il est alors facile de savoir quand le cône (6) sera de révolution.

Un cône de révolution n'étant autre chose qu'un cône bitangent au cercle imaginaire de l'infini, si l'on cherche les trois systèmes de sections circulaires, on trouvera : 1° un système double correspondant à la corde des contacts lequel donne les parallèles de la surface de révolution; 2° un système simple composé de plans tangents au cercle imaginaire de l'infini menés par une parallèle à l'axe.

Le cône de sommet S sera de révolution : 1° si le premier membre de (6) représente un plan double; 2° si le premier membre de (6) représente deux plans tangents au cercle imaginaire de l'infini. Par suite de la signification géométrique indiquée plus haut, on voit que le cône sera de révolution :

1° Si le point S est situé sur le cône (7), auquel cas le plan tangent en S au cône (7) est perpendiculaire à l'axe;

2° Si le point S est situé sur l'une des focales du cône (7), auquel cas la focale est l'axe de révolution.

2. Je désigne par u_1, v_1, w_1, p_1 les coordonnées du plan P, et alors j'ai pour équation tangentielle de la courbe du complexe

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & l[up_1]^2 + m[vp_1]^2 + n[wp_1]^2 \\ & \quad = K\left\{[vw_1]^2 + [wu_1]^2 + [uv_1]^2\right\}. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre, égalé à zéro, donne une surface admettant le plan P comme plan double; c'est donc, en réalité, une courbe plane située dans le plan P. Cette courbe n'est autre chose que la section du cône (7) par le plan P, laquelle se réduira à un point double si le plan passe par le sommet du cône.

Le second membre, égalé à zéro, donne la courbe d'intersection du plan P et du cercle imaginaire de l'infini, c'est-à-dire les deux points circulaires relatifs à ce plan P.

L'équation (8), où K est un paramètre arbitraire, représente donc un système de coniques homofocales dont fait partie la section du cône (7) par le plan P.

Pour que la courbe du complexe soit une parabole, il faut que la section du cône (7) par le plan P soit elle-même une parabole. Le plan P doit donc être parallèle à un plan tangent au cône (7).

Pour que la courbe du complexe soit un cercle, il faut que la section du cône (7) par le plan P soit un cercle ou un point double. On a d'abord toutes les directions de section circulaire du cône (7). On a ensuite tous les plans passant par le sommet du cône (7), c'est-à-dire par le centre de la quadrique S.

Il est inutile de remarquer que le foyer de la parabole et le centre du cercle se confondent avec les points correspondants de la section homofocale déterminée dans le cône (7).

3. Une propriété très remarquable du complexe consiste en ce qu'il est à lui-même son propre polaire réciproque par rapport à huit quadriques.

En effet, cherchons le complexe polaire réciproque du complexe donné par rapport à la quadrique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

où A, B, C sont des paramètres indéterminés.

A un point x, y, z, t, on fera correspondre son plan polaire

$$U = \frac{x}{A}, \qquad V = \frac{y}{B}, \qquad W = \frac{z}{C}, \qquad P = -t,$$

de sorte que, en appelant α_1, β_1, γ_1, α'_1, β'_1, γ'_1 les nouvelles coordonnées d'une droite quelconque, on aura les formules de transformation

$$\alpha_1 = VW_1 - WV_1 = \frac{yz_1 - zy_1}{BC} = -\frac{\alpha'}{BC},$$

$$\alpha'_1 = PU_1 - UP_1 = \frac{-tx_1 + xt_1}{A} = \frac{\alpha}{A}.$$

L'équation du complexe devient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &l B^2 C^2 \alpha_1^2 + m C^2 A^2 \beta_1^2 + n A^2 B^2 \gamma_1^2 \\ &\qquad - K(A^2 \alpha_1'^2 + B^2 \beta_1'^2 + C_2 \gamma_1'^2) = 0, \end{aligned}\right.$$

et il suffit de prendre

$$A^2 = \frac{K^2}{mn}, \qquad B^2 = \frac{K^2}{nl}, \qquad C^2 = \frac{K^2}{lm}$$

pour retrouver l'équation primitive (5).

Le complexe est donc à lui-même sa propre polaire réciproque par rapport aux huit quadriques

$$\pm x^2 \sqrt{mn} \pm y^2 \sqrt{nl} \pm z^2 \sqrt{lm} = K.$$

Il est alors facile de comprendre pourquoi, si l'on cherche d'une part le lieu des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans, d'autre part l'enveloppe des plans pour lesquels la courbe du complexe se réduit à deux points, on trouve la même surface.

Dans le cas particulier où

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = K$$

représente un ellipsoïde, on trouve une vraie surface des ondes qui correspond à la quadrique

$$l x^2 + m y^2 + n z^2 = K.$$

Le cône asymptote de la surface des ondes est, comme on sait,

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n}\right) = 0.$$

On retrouve ici le cône (7) qui intervenait si heureusement dans la solution du problème. Ce cône est cône asymptote de la surface des ondes et ses focales, dont il a été parlé plus haut, sont les droites qui joignent le centre de la surface des ondes à ses points doubles.

Ces propriétés sont tout à fait semblables à celles du complexe des droites telles que les plans tangents menés par elles à une quadrique fixe soient rectangulaires. D'ailleurs, l'équation de ce complexe bien connu pouvant s'écrire

$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2,$$

l'analogie qu'il présente avec le complexe actuel

$$l\alpha'^2+m\beta'^2+n\gamma'^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

est manifeste.

On démontrerait donc sans peine cette très belle propriété que, dans le cas d'une surface des ondes ordinaire, toutes les droites du complexe pénètrent entre les deux nappes de cette surface.

On voit, d'ailleurs, qu'il y aurait probablement intérêt à étudier avec soin la forme des surfaces analogues à la surface des ondes que l'on rencontrerait en prenant pour quadrique initiale un hyperboloïde tel que le cône asymptote puisse être coupé suivant un angle droit par des plans réels.