Nouvelles annales de mathématiques

Ernest Cesàro

Sur la convergence des séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 49-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__49_1>

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES;

Par M. Ernest CESARO,
Professeur à l'Université de Palerme.

Dans toute série convergente, le produit d'un terme par son rang ne peut tendre vers une limite différente de zéro.

Ce théorème est ordinairement démontré pour les séries à termes positifs, et la démonstration est fondée sur la divergence de la série harmonique. Il est vrai que, si nu_n tend vers $\lambda \gtrless 0$, u_n finit par prendre le signe de λ, et, par suite, on pourrait se borner à considérer les séries à termes positifs. Mais nous préférons exposer ici une démonstration indépendante de toute série spéciale et de toute hypothèse sur les signes des termes. Rappelons d'abord que si, pour n infini, a_n tend vers une limite, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = \lim a_n.$$

Il en résulte que l'on peut écrire

$$\lim \frac{1}{n}(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n) = \lambda.$$

D'autre part, la somme $u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n$ peut s'écrire ainsi

$$\begin{aligned} &S_1 + 2(S_2 - S_1) + \ldots + n(S_n - S_{n-1}) \\ &\quad = (n+1)S_n - (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n). \end{aligned}$$

Conséquemment

$$\lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) S_n - \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)\right] = \lambda$$

Si la série est convergente, on a, en vertu de (1),

$$\lim \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n) = \lim S_n.$$

Donc $\lambda = 0$.

Rappelons que la condition $\lim nu_n = 0$ n'est pas *suffisante* pour la convergence, car il y a des séries divergentes qui y satisfont. Elle n'est pas *nécessaire*, car nu_n pourrait osciller au lieu de tendre vers zéro. Cependant elle devient nécessaire pour les séries dans lesquelles le rapport de deux termes consécutifs tend vers une limite déterminée; car, si nu_n oscillait, il en serait de même de $\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}$, et, partant, de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Remarquons enfin que la condition $\lim nu_n = \lambda$, où $\lambda \gtrless 0$, est *suffisante pour la divergence.*

Le caractère de divergence que nous venons d'obtenir a plus d'importance qu'on ne lui en donne dans les *Traités;* car, toutes les fois qu'il permet de constater la divergence d'une série, on peut être assuré que *la règle de Duhamel ne saurait en faire autant.* Supposons, en effet, λ fini et différent de zéro. On a

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n}{n+1} \, \frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = 1$$

C'est le cas de recourir au théorème de Duhamel. Soit

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu,$$

c'est-à-dire

$$\lim \frac{(n-1)u_{n+1} - nu_n}{u_{n+1}} = 1 - \mu. \tag{2}$$

Considérons la série

$$v_1 = u_1, \qquad v_2 = 2u_2 - u_1, \qquad v_3 = 3u_3 - 2u_2, \qquad \ldots,$$

évidemment convergente, puisque

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = nu_n.$$

L'égalité (2) devient

$$\lim \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = 1 - \mu,$$

d'où

$$\lim nv_n = (1 - \mu)\lambda.$$

Mais le premier membre est nul. Donc $(1-\mu)\lambda = 0$; puis $\mu = 1$. La règle de Duhamel ne conduit à rien.

On parvient au même résultat, dans le cas de séries à termes positifs, en partant de la relation

$$(3) \qquad \lim \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \lim a_n,$$

qu'on déduit aisément de (1) par le changement de a_n en $\log a_n$. Pour $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, on obtient

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}} = e.$$

De même, pour $a_n = nu_n$, on trouve, en tenant compte du dernier résultat,

$$\lim n \sqrt[n]{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n} = \lambda e.$$

D'autre part, si l'on fait

$$x_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$$

dans la relation connue

$$\lim \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{\lim x_n},$$

on obtient

$$\lim \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^n = e^{\mu};$$

puis, pour

$$a_n = \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^n,$$

la relation (3) devient

$$\lim \frac{\sqrt[n]{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n}}{u_n} = e^{\mu},$$

d'où

$$\lim n \sqrt[n]{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n} = \lambda e^{\mu}.$$

Donc $\mu = 1$.

Inversement, il est facile de se convaincre que nu_n

tend vers zéro toutes les fois que les règles précédentes permettent de reconnaître qu'une série est convergente. En nous bornant aux séries à termes positifs, soit d'abord

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \lambda < 1,$$

et prenons $\lambda < q < 1$. Il doit exister un nombre fini ν, tel que, pour $n \geqq \nu$, on ait toujours

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} < q,$$

puis

$$\frac{nu_n}{\nu u_\nu} < q^{n-\nu}.$$

Donc, pour n croissant à l'infini, $\lim nu_n = 0$. En second lieu, soit $\lambda = 1$; mais

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu > 1,$$

et prenons $1 < q < \mu$. On pourra déterminer ν de manière que, pour $n \geqq \nu$, on ait toujours

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n},$$

puis

$$\frac{nu_n}{\nu u_\nu} < \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots n}{(\nu+q)(\nu+q+1)\ldots(n+q-1)}.$$

On sait, d'ailleurs, que le second membre de cette inégalité est le produit de

$$\frac{(1+q)(2+q)\ldots(\nu+q-1)}{2.3.4\ldots\nu}\,\frac{\Gamma(1+q)}{n^{q-1}}$$

par une fonction de n, qui tend vers l'unité pour n infini. Donc, encore une fois, à cause de $q > 1$, on a $\lim nu_n = 0$.

Le théorème exprimé par l'égalité (1) est susceptible d'une utile généralisation. Soit $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ une série divergente, à termes positifs. Si a_n tend vers une limite a, il existe un nombre ν, tel que, pour $n > \nu$, on ait toujours

$$|\, a_n - a \,| < \varepsilon,$$

ε étant donné à l'avance arbitrairement petit. On en déduit

$$|\, a_n v_n - a v_n \,| < \varepsilon v_n.$$

Maintenant, si l'on pose

$$\sigma_n = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n - a(v_1 + v_2 + \ldots + v_n),$$

on obtient par addition

$$|\, \sigma_n - \sigma_\nu \,| < \varepsilon(v_{\nu+1} + v_{\nu+2} + \ldots + v_n),$$

puis

$$\left| \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n - \sigma_\nu}{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n} - a \right| < \varepsilon \left(1 - \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_\nu}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} \right).$$

Conséquemment, si l'on fixe ν en faisant augmenter n à l'infini, on trouve

$$\lim \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n} = a.$$

Il suffit de faire $v_n = 1$ pour retrouver (1). Cela étant, supposons que

$$a_n = \frac{u_n}{v_n}$$

tende vers une limite. On trouve

$$\lim \frac{S_n}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} = \lim \frac{u_n}{v_n}.$$

Pour $v_n = \frac{1}{n}$, nous voyons que

$$\lim \frac{S_n}{\log n} = \lim n u_n,$$

pourvu que le second membre existe. Il en résulte que *les séries divergentes, pour lesquelles $n u_n$ tend vers zéro, sont moins divergentes que la série harmonique.* De même, pour $v_n = 1$, on trouve

$$\lim \frac{S_n}{n} = \lim u_n.$$

Par suite, *les séries divergentes, dont le terme général tend vers zéro, sont moins divergentes que la série* $1 + 1 + 1 + \ldots$. Ici il convient de faire remarquer qu'on peut rigoureusement comparer la divergence de deux séries en étudiant le rapport des sommes des n premiers termes, pour n infini. Lorsque ce rapport a une limite finie et déterminée, autre que zéro, les deux séries sont également divergentes. On dit que la première série est moins divergente que la seconde lorsque le rapport en question tend vers zéro.

Partageons le système des nombres entiers en un nombre fini de systèmes $A_1, A_2, \ldots, A_r$, et supposons que a_n tende vers λ_i lorsque n parcourt A_i. Soient respectivement n_i et σ_i le nombre et la somme des entiers, non supérieurs à n, qui appartiennent au système A_i. Soit, en outre, ϖ_i la probabilité qu'un entier, pris au hasard, appartienne à A_i. On a, pour n infini,

$$\lim \frac{n_i}{n} = \varpi_i. \qquad \lim \frac{\sigma_i}{n_i} = \lambda_i.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{n_1}{n}\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{n_2}{n}\frac{\sigma_2}{n_2} + \ldots + \frac{n_r}{n}\frac{\sigma_r}{n_r}.$$

Donc

$$(4)\quad \lim \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 + \dots + \lambda_r\varpi_r.$$

On démontrerait de même que

$$(5)\qquad \lim \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = \lambda_1^{\varpi_1}\lambda_2^{\varpi_2}\lambda_3^{\varpi_3}\dots\lambda_r^{\varpi_r}.$$

Reprenons (4) et faisons-y $a_n = nu_n$. On trouve que *l'on doit avoir*

$$(6)\qquad \lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 + \lambda_3\varpi_3 + \dots + \lambda_r\varpi_r = 0,$$

pour que la série soit convergente. C'est là un nouveau caractère, qui permet de constater immédiatement la divergence de certaines séries. Ainsi, par exemple, on voit au premier coup d'œil que la série

$$1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \dots$$

est divergente, car on a $\lambda_1 = -1$, $\varpi_1 = \frac{1}{3}$, lorsque n est divisible par 3; et $\lambda_2 = 1$, $\varpi_2 = \frac{2}{3}$, lorsque n est premier avec 3.

Nous pouvons même énoncer des propositions générales, qui offrent un certain intérêt. Considérons, par exemple, un système A, constitué par une suite a_1, a_2, a_3, ... de nombres entiers, croissant à l'infini. Soit ϖ la probabilité qu'un nombre entier, pris au hasard, appartienne au système A. La condition (6), appliquée à la série

$$(7)\qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots,$$

donne $\varpi = 0$, en supposant $u_n = \frac{1}{n}$ ou bien $u_n = 0$, suivant que n appartient ou non au système A. Conséquemment, *pour que la série* (7) *soit convergente, il* *est nécessaire que les dénominateurs soient infiniment rares parmi les nombres entiers.* Cette condition n'est pas suffisante. Ainsi la série (7) est convergente lorsque A est le système des *carrés parfaits :* elle est divergente lorsque A est le système des *nombres premiers.* Les fréquences de ces deux systèmes sont infinitésimales : leurs inverses deviennent infinies comme les fonctions $\sqrt{n}$, $\log n$, respectivement. Le dernier théorème est, du reste, une conséquence immédiate d'un théorème de Dirichlet, d'après lequel la limite de

$$\varepsilon\left(\frac{1}{a_1^{1+\varepsilon}}+\frac{1}{a_2^{1+\varepsilon}}+\frac{1}{a_3^{1+\varepsilon}}+\ldots\right),$$

pour $\varepsilon = 0$, est égale à ϖ. Or, lorsque la série (7) est convergente, la limite en question est 0. Donc $\varpi = 0$.

Changeons les signes de certains termes, arbitrairement choisis, dans la série harmonique, et soit ϖ la probabilité de rencontrer un terme négatif dans la série obtenue

$$(8) \qquad \pm 1 \pm \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{4} \pm \ldots.$$

Les indices des termes négatifs constituent un premier système pour lequel on a $\lambda_1 = -1$, $\varpi_1 = \varpi$. Les indices des termes positifs constituent un second système, pour lequel $\lambda_2 = 1$, $\varpi_2 = 1 - \varpi$. La condition (6) devient

$$1 - 2\varpi = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi = \tfrac{1}{2}.$$

Conséquemment, *pour que la série* (8) *soit convergente, il faut que les termes négatifs y soient tout aussi fréquents que les termes positifs.*

Faisons une inversion de termes dans la série

$$(9) \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \ldots,$$

en conservant l'ordre des termes de même signe. Supposons que l'on ait, après l'inversion, n_1 termes positifs, suivis de n_2 termes négatifs, etc. Soit

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{2r},$$

et désignons par ϖ la probabilité de rencontrer un terme négatif, de sorte que

$$\varpi = \lim \frac{n_2 + n_4 + \ldots + n_{2r}}{n},$$

$$1 - \varpi = \lim \frac{n_1 + n_3 + \ldots + n_{2r-1}}{n}.$$

Tant que ϖ est différent de zéro et de 1, la série considérée *peut être* convergente. Remarquons, en effet, que nu_n tend vers $-\frac{1}{2\varpi}$, ou bien vers $\frac{1}{2(1-\varpi)}$, suivant que u_n est négatif ou positif. La condition (6) est donc vérifiée. Pour montrer que la série *est* convergente, remarquons que la somme de ses n premiers termes est

$$S_n = H_{2(n_1+n_3+\ldots+n_{2r-1})} - \tfrac{1}{2}H_{n_1+n_3+\ldots+n_{2r-1}} - \tfrac{1}{2}H_{n_2+n_4+\ldots+n_{2r}},$$

où H_n représente la somme des n premiers termes de la série harmonique. On sait, d'ailleurs, que cette dernière somme est asymptotique à $\log n + C$, d'où il suit que S_n est asymptotique à

$$\log 2 + \frac{1}{2}\log \frac{n_1 + n_3 + n_5 + \ldots + n_{2r-1}}{n_2 + n_4 + n_6 + \ldots + n_{2r}}.$$

Conséquemment, *la somme de la série considérée est égale au logarithme naturel de*

$$2\sqrt{\frac{1}{\varpi} - 1}.$$

En particulier, si l'on veut altérer l'ordre des termes dans (9), de manière à obtenir une somme *nulle*, on doit prendre

$$2\sqrt{\frac{1}{\varpi}-1}=1, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi=\tfrac{4}{5}.$$

Par exemple,

$$1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{14}-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{5}-\ldots=0.$$

Si, au contraire, on veut que la série conserve la somme qu'elle a, *il faut laisser les termes négatifs se succéder aussi fréquemment que les positifs.*

Il est remarquable que le caractère de convergence exprimé par la relation (6) soit encore applicable à des séries, pour lesquelles viennent à manquer d'autres caractères importants. Il est d'abord évident que le rapport de deux termes consécutifs oscille, car on a

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\lambda_i}{\lambda_j},$$

lorsque n parcourt A_j, en prenant seulement les valeurs qui sont suivies, dans le système total, de nombres appartenant au système A_i Soit ϖ_{ij} la fréquence de ces valeurs, de sorte que

$$\varpi_i=\varpi_{i1}+\varpi_{i2}+\ldots+\varpi_{ir}=\varpi_{1i}+\varpi_{2i}+\ldots+\varpi_{ri}.$$

La formule (5) permet d'écrire

$$\lim \sqrt[n]{u_n}=\prod_{i,j}^{r}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\varpi_{ij}}=1.$$

L'examen de cette limite ne permet donc pas de constater la divergence de la série. Il resterait à chercher les conditions moyennant lesquelles on serait autorisé à étendre les formules (4) et (5) au cas de r infini. Nous nous en occuperons peut-être.