Nouvelles annales de mathématiques

Geminiano Pirondini

Sur les surfaces de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 486-502

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__486_0>

SUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

1. M. Aoust, dans un Mémoire inséré au *Journal de Liouville* (1846), a trouvé pour équation de la ligne L qui coupe les lignes méridiennes d'une surface de révolution sous l'angle constant α

$$\xi = \tang \alpha . \sigma,$$

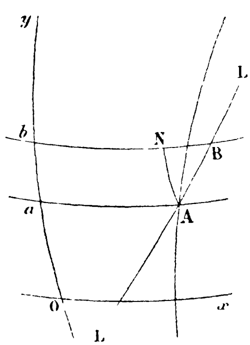
σ étant l'arc de la ligne méridienne et ξ l'arc du parallèle qui passe par le point considéré de la trajectoire.

Il est cependant facile de montrer que la trajectoire L, par rapport au système d'axes curvilignes considéré, n'est pas représentée par l'équation linéaire précédente.

A cet égard, j'espère qu'on m'excusera de publier cette Note pour rectifier cette petite inexactitude échappée à M. Aoust, dont j'ai étudié avec intérêt les Ouvrages remarquables.

Sur une surface de révolution quelconque, soient Oy

Fig. 1.



(*fig.* 1) une ligne méridienne, Ox une parallèle, A et B deux points consécutifs de la trajectoire qui coupe les lignes méridiennes sous l'angle constant i.

Si l'on mène les parallèles Aa, Bb, on a Aa, Oa pour coordonnées de A, et Bb, Ob pour coordonnées de B. Soit AM la méridienne qui passe par le point A; si l'on fait $bN = aA$, on a

$$Aa = x, \qquad Bb = x + dx,$$
$$dx = Bb - Aa = BN = BM + MN.$$

Si l'on désigne par R le rayon du parallèle et par ω l'angle compris entre les plans des lignes méridiennes Ob, AM, on peut écrire

$$Aa = R\,\omega, \qquad Mb = (R + dR)\,\omega$$

et conséquemment

$$MN = Mb - Aa = \omega\, dR.$$

D'ailleurs

$$BM = AM \operatorname{tang} i = \operatorname{tang} i\, dy;$$

donc

$$dx = \operatorname{tang} i\, dy + \omega\, dR.$$

L'angle ω est défini par l'égalité

$$\omega = \frac{x}{R},$$

ce qui donne

$$dx = \operatorname{tang} i\, dy + x\,\frac{dR}{R}.$$

La trajectoire L est donc définie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} i + x\,\frac{1}{R}\,\frac{dR}{dy}.$$

Pour intégrer cette équation différentielle linéaire, posons

$$(1) \qquad \frac{1}{R}\frac{dR}{dy} = \varphi(y);$$

alors

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} i + x\varphi(y);$$

d'où, en intégrant,

$$(2) \qquad x = e^{\int\varphi(y)dy}\left[a + \operatorname{tang} i \int e^{-\int\varphi(y)dy}\, dy\right].$$

a étant une constante arbitraire.

Si l'on pose

$$\int e^{-\int\varphi(y)dy}\, dy = \psi(y),$$

on obtient

$$\varphi(y) = -\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}$$

et, à cause de (1),

$$\frac{1}{R} = b\psi'(y), \qquad x = \frac{1}{\psi'(y)}\,[a + \operatorname{tang} i\,\psi(y)].$$

Si l'on désigne par $\theta(y)$ le second membre de la dernière égalité, on a

$$x = \theta(y), \qquad R = k\,\theta(y)\, e^{-\operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)}}.$$

Si $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ est le système d'axes coordonnés, R est la coordonnée ξ de la ligne méridienne à l'instant où le plan de cette ligne coïncide avec le plan coordonné $\eta = 0$; la coordonnée y de la trajectoire est l'arc s de la ligne méridienne.

On a donc ce théorème :

Si, par rapport au système d'axes curvilignes formé sur une surface de révolution par une ligne méridienne (axe des y) et par un parallèle (axe des x), la trajec-

toire qui coupe les lignes méridiennes sous l'angle constant i est représentée par l'équation

$$x = \theta(y),$$

les coordonnées d'un point quelconque de la ligne méridienne sont données par les équations

$$\xi = k\,\theta(s)\,e^{-\operatorname{tang} i \int \frac{ds}{\theta(s)}},$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - k^2[\theta'(s) - \operatorname{tang} i]^2 e^{-2\operatorname{tang} i \int \frac{ds}{\theta(s)}}}\, ds,$$

s étant l'arc de cette ligne.

2. Soient réciproquement

$$\xi = \theta(s), \qquad \zeta = \int \sqrt{1 - \theta'^2(s)}\, ds$$

les coordonnées d'un point quelconque de la ligne méridienne d'une surface de révolution.

Dans ce cas $R = \theta(y)$ et, en appliquant (1),

$$\log R = \int \varphi(y)\, dy - \log b = \log \theta(y):$$

d'où

$$b\,\theta(y) = e^{\int \varphi(y) dy};$$

par conséquent,

$$\int e^{-\int \varphi(y)\, dy}\, dy = \frac{1}{b} \int \frac{dy}{\theta(y)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (2), on obtient

$$x = \theta(y) \left[ab + \operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)} \right].$$

On a ainsi ce théorème :

Sur la surface de révolution engendrée par la ligne méridienne

$$\xi = \theta(s), \qquad \zeta = \int \sqrt{1 - \theta'^2(s)}\, ds$$

la trajectoire qui coupe les méridiennes sous l'angle constant i est représentée (par rapport au système d'axes curvilignes formé par une ligne méridienne et par une parallèle de la surface) par l'équation

$$(3) \qquad x = \theta(y)\left[k + \operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)}\right],$$

k étant une constante arbitraire.

Application. — Nous allons déterminer la surface de révolution sur laquelle une loxodromie est représentée en coordonnées x, y par une équation linéaire

$$x = ay + b.$$

On doit avoir, à cause de (3),

$$ay + b = \theta(y)\left[k + \operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)}\right];$$

d'où

$$k + \operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)} = \frac{ay+b}{\theta(y)}.$$

En différentiant par rapport à y, on a

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\theta(y)} = \frac{a\,\theta(y) - (ay+b)\theta'(y)}{\theta^2(y)};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\theta(y)}{\theta'(y)} = \frac{a - \operatorname{tang} i}{ay+b}.$$

Cette relation, par une intégration et par des calculs très faciles, nous offre

$$\theta(y) = k(ay+b)^{1 - \frac{2 \operatorname{tang} i}{a}}.$$

On a donc la propriété suivante :

La surface de révolution sur laquelle la loxodromie qui coupe les lignes méridiennes sous l'angle constant i est représentée en coordonnées x, y par l'équa-

tion linéaire

$$x = ay + b$$

est engendrée par la rotation de la courbe méridienne

$$\xi = k(as+b)^{1-\frac{\operatorname{tang} i}{a}},$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - k^2(a - \operatorname{tang} i)^2 (as+b)^{-\frac{2\operatorname{tang} i}{a}}}\, ds$$

autour de l'axe des ζ.

La propriété énoncée par M. Aoust, relativement aux loxodromies des surfaces de révolution, est donc vérifiée seulement pour une classe de loxodromies (celle définie par l'angle i) de la surface de révolution que nous venons de déterminer.

3. On peut énoncer le théorème que nous venons de démontrer sous une forme remarquable.

Si les coordonnées d'un point d'une ligne plane quelconque s'expriment en fonction de l'arc de la manière suivante

$$\xi = \varphi(s), \qquad \zeta = \int \sqrt{1 - \varphi'^2}\, ds,$$

le rayon de courbure ρ de la ligne est donné par l'égalité

$$\frac{1}{\rho^2} = \xi''^2 + \zeta''^2 = \frac{\varphi''^2}{1 - \varphi'^2};$$

d'où

$$\rho = \frac{\sqrt{1 - \varphi'^2}}{\varphi''}.$$

On peut donc écrire

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{\theta}{k[\theta\theta'' + (\operatorname{tang} i - \theta')\operatorname{tang} i]} \\ &\quad \times \sqrt{e^{2\operatorname{tang} i \int \frac{ds}{\theta}} + k^2(\theta' - \operatorname{tang} i)^2}, \end{aligned} \right.$$

pourvu que l'on remplace φ par la fonction

$$k\theta(s)\,e^{-\tang i\int\frac{ds}{\theta(s)}}.$$

Donc :

Pour qu'une loxodromie d'une surface de révolution soit représentée par l'équation $x=\theta(y)$, il faut et il suffit que le rayon de courbure de la ligne méridienne s'exprime en fonction de l'arc par l'égalité (4), k étant une constante et i l'angle constant sous lequel la ligne coupe les méridiennes.

4. Sur une surface quelconque s on appelle *loxodromie* toute ligne L qui coupe les lignes de courbure d'un système sous un angle constant i. Nous nous proposons ici de déterminer les conditions qui doivent être remplies pour que l'équation d'une loxodromie d'une surface quelconque soit linéaire.

Soit

$$ds^2 = \mathrm{F}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

le carré de la distance infinitésimale entre deux points consécutifs de la surface, i l'angle (constant) sous lequel L coupe les lignes coordonnées $v=$ const., σ l'arc de L; on a

$$\cos i = \sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{du}{d\sigma},\qquad \sin i = \sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dv}{d\sigma}$$

et l'équation différentielle de la ligne L peut s'écrire

$$\sqrt{\mathrm{E}}\tang i\,du = \sqrt{\mathrm{G}}\,dv.$$

Pour que cette équation donne lieu à une relation linéaire entre les variables u, v, il faut et il suffit que

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}} = \text{const.}$$

On a donc ce théorème :

Pour qu'une loxodromie d'une surface quelconque soit représentée par une équation linéaire en u et v, u et v étant les paramètres des lignes de courbure de la surface, il faut et il suffit que les lignes de courbure forment un double système de lignes isothermes et que les paramètres u et v soient choisis de façon que le rapport $\frac{E}{G}$ soit constant.

Les lignes de courbure d'une surface de révolution sont isothermes; on voit donc que la loxodromie d'une telle surface peut être représentée par une équation linéaire, pourvu que l'on fasse un choix convenable des paramètres des lignes de courbure.

Si l'on désigne par σ l'arc de la ligne méridienne, par R le rayon des parallèles de la surface, par ω l'angle compris entre les plans déterminés par l'axe et deux points de la ligne considérée, on a

$$ds^2 = d\sigma^2 + R^2\, d\omega^2 = R^2 \left[\left(\frac{d\sigma}{R}\right)^2 + d\omega^2\right].$$

Si l'on pose $\frac{d\sigma}{R} = dt$, on pourra regarder t comme le paramètre des parallèles de la surface; de cette relation on déduit

$$t = \int \frac{d\sigma}{R(\sigma)} = f(\sigma),$$

$f(\sigma)$ étant une fonction convenable de σ.

De là on a

$$\sigma = \varphi(t)$$

et conséquemment R peut être considéré comme une fonction connue de t.

Donc

$$ds^2 = R^2(t)\,(dt^2 + d\omega^2),$$

et l'équation différentielle de la loxodromie devient

$$\tang i\, dt = d\omega,$$

d'où

$$\tang i . t = \omega + \text{const.}$$

Donc :

L'équation de la loxodromie d'une surface de révolution est linéaire par rapport aux variables t et ω que nous venons de définir.

Lorsque les lignes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ ne sont pas les lignes de courbure, on a les propriétés qu'on vient de voir pour toute ligne L qui coupe les lignes coordonnées d'un système sous un angle constant. Pour en donner une application, nous allons déterminer les surfaces réglées sur lesquelles une trajectoire isogonale des génératrices rectilignes est représentée par une équation linéaire.

Soient L une ligne quelconque à double courbure; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale; ρ le rayon de courbure, r le rayon de torsion, v l'arc de la ligne. Si l'on mène par les points de L des droites placées sur les plans normaux et inclinées de l'angle θ sur les normales principales, on a, pour les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque de la surface réglée engendrée,

$$\begin{aligned}
X &= x + u(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\cos l),\\
Y &= y + u(\cos\theta\cos\mu + \sin\theta\cos m),\\
Z &= z + u(\cos\theta\cos\nu + \sin\theta\cos l),
\end{aligned}$$

x, y, z étant les coordonnées du point de L et u les portions des génératrices rectilignes comptées à partir de L.

On en déduit (pourvu que l'on applique les formules connues de M. Serret)

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \cos\theta \cos\lambda + \sin\theta \cos l,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \left(1 - \frac{u}{\rho}\cos\theta\right)\cos\alpha + u\sin\theta\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)\cos\lambda$$
$$- u\cos\theta\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)\cos l,$$

. . . .

Par conséquent,

$$E = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$F = \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

$$G = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = \left(1 - \frac{u}{\rho}\cos\theta\right)^2 + u^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2.$$

Le carré de la distance ds entre deux points consécutifs de la surface a donc l'expression suivante :

$$ds^2 = du^2 + \left[\left(1 - \frac{u}{\rho}\cos\theta\right)^2 + u^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2\right]dv^2.$$

La condition que les lignes $u =$ const., $v =$ const. soient isothermes équivaut à l'autre

$$G = UV,$$

U étant une fonction de u et V une fonction de v.

Or

$$G = 1 - u\frac{2\cos\theta}{\rho} + u^2\left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2\right]$$

et si l'on pose

$$\frac{2\cos\theta}{\rho} = V_1, \qquad \frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2 = V_2,$$

V_1, V_2 étant deux fonctions de v, la condition à remplir devient

$$1 - uV_1 + u^2V_2 = UV:$$

d'où

$$\log(1 - uV_1 + u^2 V_2) = \log U + \log V.$$

Si l'on dérive cette égalité successivement par rapport aux variables u, v, on a

$$\frac{u^2(V_2 V'_1 - V_1 V'_2) + 2uV'_2 - V'_1}{1 - uV_1 + u^2 V_2} = 0.$$

Pour que cette égalité soit vérifiée pour toute valeur de u, il doit être

$$V'_1 = 0, \qquad V'_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$V_1 = \frac{2\cos\theta}{\rho} = -a, \qquad V^2 = \frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2 = b^2.$$

a et b étant deux constantes.

On a donc

$$G = 1 + au + b^2 u^2,$$

et conséquemment

$$ds^2 = du^2 + (1 + au + b^2 u^2)\,dv^2.$$

Cette forme de l'expression de ds^2 caractérise des surfaces de révolution ou bien des surfaces applicables sur celles de révolution.

Donc :

Les surfaces réglées sur lesquelles les génératrices rectilignes et les trajectoires orthogonales forment deux systèmes de lignes isothermes sont caractérisées par la propriété d'être applicables sur des surfaces de révolution.

Si l'on rappelle que les surfaces réglées qu'on vient de trouver sont aussi applicables sur l'hélicoïde gauche à plan directeur, on a :

Les surfaces réglées sur lesquelles une trajectoire isogonale des génératrices rectilignes est représentée *par une équation linéaire, sont applicables sur l'hélicoïde gauche à plan directeur.*

5. Si l'on a égard à la figure du n° 1, on déduit du triangle infinitésimal ABM

$$d\sigma = AB = \frac{AM}{\cos i} = \frac{dy}{\cos i}.$$

L'angle $d\varepsilon$ de contingence géodésique d'une loxodromie placée sur une surface de révolution est donné par la formule (*voir* P. Serret, *Lignes à double courbure*)

$$d\varepsilon = -\operatorname{tang} i\,\frac{dR}{R};$$

et puisque

$$R = k\theta(y)e^{\operatorname{tang} i\int\frac{dy}{\theta(y)}},$$

$$dR = ke^{-\operatorname{tang} i\int\frac{dy}{\theta(y)}}[\theta'(y) - \operatorname{tang} i]\,dy.$$

on a

$$-\frac{dR}{R} = \frac{\operatorname{tang} i - \theta'(y)}{\theta(y)}\,dy,$$

et enfin

$$d\varepsilon = \frac{\operatorname{tang} i - \theta'(y)}{\theta(y)}\,dy \operatorname{tang} i.$$

Si donc ρ_g est le rayon de courbure géodésique de la loxodromie, on aura

$$\rho_g = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\theta(y)}{[\operatorname{tang} i - \theta'(y)]\sin i}.$$

Si l'on pose la condition

$$\rho_g = \text{const.} = a,$$

il vient

$$\frac{a\sin i\,\theta'(y)}{a\sin i\operatorname{tang} i - \theta(y)}\,dy = dy;$$

d'où par intégration

$$a \sin i \log[a \sin i \operatorname{tang} i - \theta(y)] = a \sin i \log b - y$$

et conséquemment

$$a \sin i \operatorname{tang} i - \theta(y) = b e^{-\frac{y}{a \sin i}}.$$

On en déduit

$$\theta(y) = a \sin i \operatorname{tang} i - b e^{-\frac{y}{a \sin i}}.$$

On a donc ce théorème :

Les loxodromies dont le rayon de courbure géodésique est une constante a sont placées sur une surface de révolution dont la ligne méridienne est représentée en fonction de l'arc s par les équations

$$\xi = k\left(a \sin i \operatorname{tang} i + b e^{-\frac{s}{a \sin i}}\right) e^{-\operatorname{tang} i \int \frac{ds}{a \sin i \operatorname{tang} i + b e^{-\frac{s}{a \sin i}}}},$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - \xi'^2}\, ds,$$

k et b étant deux constantes arbitraires et i l'angle sous lequel la loxodromie coupe les lignes méridiennes.

6. Nous allons déterminer en coordonnées x, y l'équation d'une ligne géodésique d'une surface de révolution.

L'équation

$$\operatorname{tang} i = \frac{dz}{dy} - x \frac{1}{R} \frac{dR}{dy},$$

que nous avons donnée au n° 1 pour une loxodromie d'une surface de révolution, est aussi applicable à toute ligne placée sur une telle surface, pourvu que l'on regarde i comme une fonction de y. Cela posé, soit L une ligne géodésique d'une surface de révolution; le théorème de Clairault nous donne

$$R \sin i = k,$$

k étant une constante.

De cette égalité on déduit

$$\tan g\, i = \frac{k}{\sqrt{R^2 - k^2}},$$

et conséquemment l'équation différentielle de la ligne géodésique peut s'écrire

$$(5) \qquad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{R}\frac{dR}{dy}x = \frac{k}{\sqrt{R^2 - k^2}}.$$

La surface de révolution étant donnée, R est une fonction connue de y; (5) est une équation différentielle linéaire, et par le calcul habituel on trouve

$$x = R\left(a + k\int\frac{dy}{R\sqrt{R^2 - k^2}}\right),$$

a étant une constante. Telle est l'équation d'une ligne géodésique d'une surface de révolution, en coordonnées x, y.

Application. — Pour donner une application de la formule que nous venons de trouver, nous allons chercher les surfaces de révolution sur lesquelles une ligne géodésique est représentée, en coordonnées x, y, par une équation linéaire

$$x = my + n.$$

On doit avoir

$$R\left(a + k\int\frac{dy}{R\sqrt{R^2 - k^2}}\right) = my + n,$$

c'est-à-dire

$$a + k\int\frac{dy}{R\sqrt{R^2 - k^2}} = \frac{my + n}{R};$$

d'où par dérivation

$$\frac{k}{R\sqrt{R^2-k^2}}=\frac{mR-(my+n)R'}{R}.$$

Cette égalité donne

$$\frac{1}{my+n}=\frac{\sqrt{R^2-k^2}}{R(m\sqrt{R^2-k^2}-k)}R';$$

d'où

$$\log(my+n)=\log a+m\int\frac{\sqrt{R^2-k^2}}{R(m\sqrt{R^2-k^2}-k)}dR.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{R^2-k^2}=R-t,$$

t étant une nouvelle variable, on a

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\sqrt{R^2-k^2}}{R(m\sqrt{R^2-k^2}-k)}dR\\
&=\int\frac{(t^2+k^2)^2\,dt}{t(k^2+t^2)(mt^2+2kt-mk^2)}\\
&=\frac{1}{m}\int\left(\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{k^2+t^2}+\frac{D}{t+\alpha}+\frac{E}{t+\beta}\right)dt.
\end{aligned}$$

α, β, A, B, C, D, E étant données par les égalités

$$\alpha=\frac{k}{m}(1-\sqrt{1+m^2}),\qquad \beta=\frac{k}{m}(1+\sqrt{1+m^2}),$$

$$A=-m,$$

$$B=\frac{2m^3}{1+m^2},$$

$$C=-\frac{2km^2}{1+m^2},$$

$$D=\frac{2(m\alpha-k)}{(1+m^2)(\alpha-\beta)},$$

$$E=\frac{2(m\beta-k)}{(1+m^2)(\beta-\alpha)}.$$

On a donc

$$my+n=at^{A}(k^2+t^2)^{\frac{B}{2}}(t+\alpha)^{D}(t+\beta)^{E}\,e^{\frac{C}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{t}{k}};$$

d'où, en observant que

$$t = \mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}, \qquad t^2 + k^2 = 2\mathrm{R}(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}),$$

$$\begin{aligned} my + n = a(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2})^{\mathrm{A}}(2\mathrm{R})^{\frac{\mathrm{B}}{2}} & \\ \times (\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2})^{\frac{\mathrm{B}}{2}} (\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2} + \alpha)^{\mathrm{D}} & \\ \times (\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2} + \beta)^{\mathrm{E}} e^{\frac{\mathrm{C}}{k} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}}{k}\right)}. & \end{aligned}$$

Si l'on introduit les valeurs de α, β, A, B, C, D, E, l'égalité ci-dessus devient

$$\begin{aligned} my + n = h\,\mathrm{R}^{\frac{m^3}{1+m^2}} \left[\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}\right]^{-\frac{m}{1+m^2}} & \\ \times \left[(m\mathrm{R} + k)(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}) - 2mk^2\right]^{\frac{m}{1+m^2}} & \\ \times e^{-\frac{2m^2}{1+m^2} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}}{k}\right)}, & \end{aligned}$$

h étant une constante quelconque.

On a ainsi ce théorème :

Lorsque la ligne géodésique d'une surface de révolution est représentée en coordonnées x, y par l'équation linéaire $x = my + n$, les coordonnées ξ, ζ d'un point quelconque de la ligne méridienne s'expriment en fonction de l'arc s par les équations suivantes

$$\begin{aligned} ms + n = h\,\xi^{\frac{m^3}{1+m^2}} \left[\xi - \sqrt{\xi^2 - k^2}\right]^{\frac{m}{1+m^2}} & \\ \times \left[(m\xi + k)(\xi - \sqrt{\xi^2 - k^2}) - 2mk\right]^{\frac{m}{1+m^2}} & \\ \times e^{-\frac{2m}{1+m^2} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - k^2}}{k}\right)}, & \end{aligned}$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - \zeta'^2\, ds},$$

h étant une constante arbitraire et k la constante qui caractérise la géodésique dans l'équation de Clairault.

Si l'on suppose $m = 0$, on a

$$x = n = \mathrm{R}\left(a + k\int \frac{dy}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}}\right).$$

De cette équation, par des opérations analogues aux précédentes, on déduit

$$h - \frac{k}{n}y = \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2} + k \arcsin\left(\frac{k}{\mathrm{R}}\right).$$

Par conséquent :

Lorsque la ligne géodésique d'une surface de révolution est représentée en coordonnées x, y par l'équation $x = n$, n étant une constante, les coordonnées ξ, ζ d'un point quelconque de la ligne méridienne s'expriment en fonction de l'arc s par les équations suivantes

$$h - \frac{k}{n}s = \sqrt{\xi^2 - k^2} + k \arcsin\left(\frac{k}{\xi}\right), \qquad \zeta = \int \sqrt{1 - \xi'^2}\, ds,$$

h étant une constante quelconque et k la constante qui caractérise la géodésique dans l'équation de Clairault.