NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

B. NIEWENGLOWSKI

Solution de la question d'analyse proposée au concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1888

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 391-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__391_1>

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1888;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

Trouver la surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique la cycloïde définie en coordonnées *rectangulaires par les équations*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= 0,\\ x &= a(v - \sin v),\\ y &= a(1 - \cos v).\end{aligned}\right.$$

Indiquer la forme de la surface : montrer que le plan des xy est un plan de symétrie, et que les tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement sont des axes de symétrie de cette surface.

Montrer que la surface peut être coupée par une infinité de plans suivant des paraboles du second degré.

Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface. Démontrer qu'un plan perpendiculaire à la base de la cycloïde et à égale distance de deux points de rebroussement consécutifs de cette courbe coupe la surface suivant une ligne de courbure.

Première méthode.

Les cosinus directeurs de la normale en un point d'une surface peuvent être représentés, en supposant les axes rectangulaires, par les nombres

$$\sin\theta\cos\alpha,\quad \sin\theta\sin\alpha,\quad \cos\theta.$$

Nous poserons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = e^{\beta},\\ &\alpha_1 = \alpha + i\beta,\qquad \beta_1 = \alpha - i\beta.\end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces variables, dont le choix a été indiqué par M. O. Bonnet, les coordonnées d'un point quelconque d'une surface minima peuvent être représentées par les formules suivantes (¹):

$$(3)\quad \begin{cases} z = f(\alpha_1) + f_1(\beta_1), \\ x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int f_1'(\alpha_1)(e^{-i\alpha_1} - e^{i\alpha_1})\,d\alpha_1 + \dfrac{1}{2}\int f_1'(\beta_1)(e^{i\beta_1} - e^{-i\beta_1})\,d\beta_1, \\ y = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int f_1'(\alpha_1)(e^{i\alpha_1} + e^{-i\alpha_1})\,d\alpha_1 - \dfrac{i}{2}\int f_1'(\beta_1)(e^{i\beta_1} + e^{-i\beta_1})\,d\beta_1. \end{cases}$$

La cycloïde donnée devant être une ligne géodésique de la surface minima cherchée, en tout point de cette cycloïde la normale sera la normale à la surface au même point, et, réciproquement, si la surface contient la cycloïde et si en chacun des points de la cycloïde la normale à la surface est dans le plan de la cycloïde, cette dernière sera une ligne géodésique, et aussi une ligne de courbure. En tous les points de la cycloïde, on devra donc avoir $\theta = 90^\circ$, c'est-à-dire $\beta = 0$, et par suite $\beta_1 = \alpha_1$.

Pour déterminer les deux fonctions inconnues f et f_1, nous écrirons : 1° que $z = 0$, et 2° que les éléments linéaires de la cycloïde et de la surface sont égaux lorsque $\beta_1 = \alpha_1$, quelle que soit la valeur de α_1.

La normale au point (ν) de la cycloïde fait avec l'axe des x un angle égal à $\pi - \frac{1}{2}\nu$ (en supposant $a > 0$); la normale à la surface au même point faisant avec l'axe des x un angle égal à α, on doit avoir, puisque $\alpha = \alpha_1$ et que ces deux normales doivent coïncider,

$$\alpha_1 = \pi - \tfrac{1}{2}\nu.$$

Si $d\sigma$ représente la différentielle de l'arc de la cycloïde, on a

$$d\sigma^2 = 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu\, d\nu^2 = 16a^2 \sin^2 \alpha_1\, d\alpha_1^2;$$

(¹) B. Niewenglowski, *Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné* (*Annales de l'École Normale;* 1880, Paris, Gauthier-Villars).

d'autre part, l'élément linéaire ds de la surface est, comme on le reconnaît aisément, donné par la formule

$$ds^2 = 4\cos^2\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} f'(\alpha_1) f_1'(\beta_1)\, d\alpha_1\, d\beta_1.$$

On doit donc avoir, si $\beta_1 = \alpha_1$,

$$(4)\qquad f(\alpha_1) + f_1(\alpha_1) = 0,$$

d'où

$$(5)\qquad f_1'(\alpha_1) = -f'(\alpha_1),$$

ce qui exprime que $z = 0$, et

$$f'^2(\alpha_1) = -4a^2 \sin^2\alpha_1,$$

pour exprimer, en tenant compte de l'équation (5), que $ds^2 = d\sigma^2$.

On tire de la dernière équation

$$f'(\alpha_1) = 2\varepsilon a i \sin\alpha_1 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

et par suite

$$f(\alpha_1) = -2\varepsilon a i \cos\alpha_1.$$

Il est, on le voit immédiatement, inutile d'ajouter une constante.

De ce qui précède on tire

$$f_1(\alpha_1) = 2\varepsilon a i \cos\alpha_1$$

ou, ce qui revient au même,

$$f_1(\beta_1) = 2\varepsilon a i \cos\beta_1.$$

Les fonctions f et f_1 étant connues, substituons leurs expressions dans les formules (3). En remplaçant la variable α par $\pi - \frac{1}{2}\nu$, on trouve sans difficulté

$$\begin{aligned}
z &= -4a\varepsilon i \sin\tfrac{1}{2}\nu \sin i\beta + \text{const.},\\
x &= -a\varepsilon(\nu - \sin\nu \cos 2i\beta) + \text{const.},\\
y &= -a\varepsilon(1 - \cos\nu \cos 2i\beta) + \text{const.};
\end{aligned}$$

en prenant $\varepsilon = -1$ et remplaçant les constantes arbitraires par zéro, on obtient

$$(6) \qquad \begin{cases} z = 4a \sin\frac{1}{2}v \sin i\beta, \\ x = a(v - \sin v \cos 2i\beta), \\ y = a(1 - \cos v \cos 2i\beta). \end{cases}$$

En donnant à v et β des valeurs réelles, on aura une surface réelle répondant à la question.

Seconde méthode.

Nous suivrons exactement la même marche, mais en employant d'autres variables.

Une surface minima est définie, en coordonnées rectangulaires, par les formules [1]

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,F(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1-u_1^2)\,F_1(u_1)\,du_1, \\ y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,F(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1+u_1^2)\,F_1(u_1)\,du_1, \\ z = \int u\,F(u)\,du + \int u_1\,F_1(u_1)\,du_1. \end{cases}$$

La normale au point (u, u_1) fait, avec l'axe des z, un angle ayant pour cosinus $\frac{uu_1 - 1}{uu_1 + 1}$.

Pour tous les points de la cycloïde, on doit donc avoir

$$u_1 = \frac{1}{u}, \qquad z = 0,$$

ce qui donne

$$(8) \qquad F_1\left(\frac{1}{u}\right) = u^4\,F(u).$$

Posons $u = \rho e^{\frac{1}{2}ti}$, $u_1 = \rho e^{-\frac{1}{2}ti}$. Pour tous les points

(1) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 289. Paris, Gauthier-Villars.

de la cycloïde on doit avoir $uu_1 = 1$, donc $\rho = 1$. Les cosinus directeurs de la normale à la surface, ayant pour expressions, en un point (u, u_1),

$$\frac{u_1 + u}{uu_1 + 1}, \quad \frac{i(u_1 - u)}{uu_1 + 1}, \quad \frac{uu_1 - 1}{uu_1 + 1}.$$

Ces valeurs deviennent

$$\cos\frac{t}{2}, \quad \sin\frac{t}{2}, \quad 0.$$

Or, au point (v) de la cycloïde, les cosinus directeurs de la normale à la courbe ont pour valeurs

$$\cos\frac{v}{2}, \quad -\sin\frac{v}{2}, \quad 0.$$

Donc, en posant $t = -v$, la normale à la surface au point $\left(e^{-\frac{vi}{2}}, e^{\frac{vi}{2}}\right)$ coïncidera avec la normale au point (v) de la cycloïde, pourvu que la condition (8) soit remplie.

En désignant, comme plus haut, par ds et $d\sigma$ les éléments linéaires de la surface et de la cycloïde, on a

$$d\sigma^2 = 4a^2 \frac{(1 - u^2)^2}{u^4} du^2,$$
$$ds^2 = (1 + uu_1)^2 \, \mathrm{F}(u) \, \mathrm{F}_1(u_1) \, du \, du_1 ;$$

cette dernière formule devient, en supposant $uu_1 = 1$ et tenant compte de l'équation (8),

$$ds^2 = 4u^2 \, \mathrm{F}^2(u) \, du^2.$$

On doit donc vérifier l'équation

$$4a^2 \frac{(1 - u^2)^2}{u^4} du^2 = 4u^2 \, \mathrm{F}^2(u) \, du^2,$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}(u) = \varepsilon a i \frac{1 - u^2}{u^3},$$

par suite (8),

$$F_1\left(\frac{1}{u}\right) = \varepsilon a i u(1 - u^2),$$

donc

$$F_1(u_1) = -\varepsilon a i \frac{1 - u_1^2}{u_1^3}.$$

En remplaçant $F(u)$ et $F_1(u_1)$ par ces expressions dans les formules (7), intégrant et posant, afin que u et u_1 soient imaginaires conjuguées,

$$u = \rho e^{-\nu i}, \qquad u_1 = \rho e^{\nu i},$$

puis, prenant $\varepsilon = -1$ et déterminant convenablement les constantes arbitraires, on trouve sans difficulté

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\left[\nu - \frac{1}{2}\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\nu\right], \\ y &= a\left[1 - \frac{1}{2}\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\cos\nu\right], \\ z &= 2a\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\frac{1}{2}\nu. \end{aligned}\right.$$

Ces formules coïncident avec les formules (6), si l'on pose $\rho = e^\beta$. Si l'on donne à ρ la valeur particulière 1, on obtient les formules (1), représentant la cycloïde donnée.

Forme de la surface. — Si l'on remplace ν par $\nu + 2k\pi$ et ρ par $(-1)^k\rho$, les expressions de y et z ne changent pas; x augmente de $2k\pi a$. La surface est donc *périodique*, elle se compose d'une infinité de nappes identiques à celle qu'on obtient en faisant varier ν de 0 à 2π.

Si l'on change ρ en $-\rho$, z change de signe sans changer de valeur absolue, x et y gardent leurs valeurs; si l'on change ν en $-\nu$, y conserve sa valeur, mais x et z changent de signes en gardant les mêmes valeurs absolues; enfin, si l'on change ν en $2\pi - \nu$, y et z restent invariables, x se change en $2\pi a - x$; il résulte de là : 1° que le plan des xy est un plan de symétrie (ce qui est d'ailleurs évident *a priori*); 2° que la tangente en un point de rebroussement de la cycloïde est un axe de symétrie; enfin 3° que tout plan perpendiculaire à la base de la cycloïde et mené à égale distance de deux rebroussements consécutifs est un plan de symétrie.

Courbes $v =$ const. — Supposons que l'on donne à v une valeur constante déterminée v_0, et cherchons les points correspondants de la surface. On a pour ces points (9)

$$(10) \qquad \frac{x - av_0}{\sin v_0} = \frac{y - a}{\cos v_0};$$

donc tous ces points sont dans un plan perpendiculaire au plan de la cycloïde. Considérons le cercle générateur de la cycloïde; quand $v = v_0$, le centre de ce cercle, qui roule sans glisser sur l'axe des x, est venu occuper une position déterminée ω, à laquelle correspond un point M de la cycloïde; l'équation (10) montre que la trace du plan de la courbe $v = v_0$ est précisément dirigée suivant le rayon ωM. On trouve, par un calcul très simple, que la section de la surface par le plan mené par la droite ωM, et perpendiculaire au plan des xy, est une parabole du second degré, ayant pour sommet le point M, et pour axe la droite ωM, la concavité de cette parabole étant dirigée de ω vers M; enfin le paramètre de cette parabole a pour valeur $4a \sin^2 \frac{1}{2} v_0$. Si l'on fait varier v de 0 à π, le paramètre va en croissant depuis 0 jusqu'à $4a$ et reprend les mêmes valeurs en sens inverse quand v varie de π à 2π. Pour $v = 0$, la parabole est infiniment aplatie et se réduit à la partie *négative* de l'axe des y, de sorte que la surface contient une infinité de *demi-droites* tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement. La surface peut donc être engendrée par la parabole mobile que nous venons de définir, et ce mode de génération indique nettement sa forme.

Courbes $\rho = \text{const.}$ — Ces courbes se projettent sur le plan des xy suivant des cycloïdes allongés et sur le plan des yz suivant des paraboles. Nous savons déjà que la cycloïde donnée est la courbe $\rho = 1$.

Équation différentielle des lignes de courbure. — Les lignes de courbure d'une surface minima sont définies par l'équation différentielle

$$F(u)\,du^2 - F_1(u_1)\,du_1^2 = 0. \tag{11}$$

Si l'on exprime que la surface a une ligne de courbure plane, dont le plan est parallèle au plan des xy, cette équation devra être vérifiée quand $u_1 = \frac{1}{u}\cdot$ En introduisant cette hypothèse dans l'équation (11), on obtient

$$F_1\left(\frac{1}{u}\right) = u^4 F(u):$$

c'est l'équation (8).

Remplaçons $F(u)$ et $F_1(u_1)$ par leurs expressions trouvées plus haut : l'équation (11) devient par cette substitution

$$\frac{1-u^2}{u^3}\,du^2 + \frac{1-u_1^2}{u_1^3}\,du_1^2 = 0. \tag{12}$$

Si l'on suppose $v = \pi$, et par suite $u = -i\rho$, $u_1 = i\rho$, ce qui donne

$$du^2 = du_1^2$$

et

$$\frac{1-u^2}{u^3} = \frac{1+\rho^2}{i\rho^3}, \qquad \frac{1-u_1^2}{u_1^3} = \frac{1+\rho^2}{-i\rho^3},$$

l'équation précédente est vérifiée ; donc le plan perpendiculaire à la base de la cycloïde et à égale distance de deux rebroussements consécutifs coupe la surface suivant une ligne de courbure. Ce résultat est d'ailleurs évident *a priori,* puisque ce plan est un plan de symétrie. On voit encore que la section parabolique obtenue est une ligne géodésique, de sorte que la surface trouvée ne diffère pas de celle qui a été étudiée par M. E. Catalan, et qui admet pour ligne géodésique une parabole du second degré.