Nouvelles annales de mathématiques

A. Astor

Théorème de Minding

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 38-43

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__38_0>

THÉORÈME DE MINDING;

PAR M. A. ASTOR,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Nous nous proposons de donner une démonstration simple du théorème suivant, dû à Minding :

Si un corps solide est sollicité, en ses divers points, par des forces indépendantes de l'orientation du corps, on peut l'amener dans une infinité de positions telles que le système de ces forces ait une résultante unique. Cette résultante rencontre toujours une ellipse et une hyperbole fixes dans le corps.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Le système des forces considérées peut être remplacé par une force R égale à leur résultante de translation et appliquée en un point déterminé du solide et par deux couples (aa', P, P'), (bb', Q, Q') dont les bras aa', bb' sont deux droites rectangulaires et invariables du solide, les forces P et Q qui les constituent étant indépendantes de l'orientation du solide et formant avec R un système de trois droites rectangulaires.

Considérons en effet le solide dans une de ses positions, rapportons-le à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz dont l'un Oz soit parallèle à la résultante de translation. Soient x, y, z les coordonnées d'un point et X, Y, Z les composantes de la force qui lui est appliquée. Menons, dans le plan xy, deux axes rectangulaires Ox', Oy'; décomposons les forces suivant les axes Ox', Oy', Oz et soient X', Y', Z' les composantes de la force considérée. Si ω est l'angle $x'Ox$, nous aurons, par des formules connues,

$$(1)\qquad \begin{cases} X' = X\cos\omega + Y\sin\omega, \\ Y' = -X\sin\omega + Y\cos\omega. \end{cases}$$

Cela posé, les forces Z ont une résultante R égale à la résultante de translation et appliquée en un point C qui ne dépend, ni de l'orientation du solide, ni de la position des axes Ox', Oy'; les forces X' et Y' donnent deux couples dont les bras aa', bb' sont, pour une valeur donnée de ω, des droites fixes dans le solide, les forces qui les constituent étant, comme ces bras, indépendantes de l'orientation du corps. Cherchons si l'on peut choisir ω de façon que aa', bb' soient proportionnels à

$$\Sigma X'x, \quad \Sigma X'y, \quad \Sigma X'z$$

pour aa', et

$$\Sigma Y'x, \quad \Sigma Y'y, \quad \Sigma Y'z$$

pour bb'.

Ces droites seront donc rectangulaires si l'on a

$$(2)\qquad \Sigma X'x\,\Sigma Y'x + \Sigma X'y\,\Sigma Y'y + \Sigma X'z\,\Sigma Y'z = 0.$$

Posons

$$\Sigma Xx = l, \qquad \Sigma Xy = m, \qquad \Sigma Xz = n,$$
$$\Sigma Yx = l', \qquad \Sigma Yy = m', \qquad \Sigma Yz = n';$$

la condition (2) s'écrit

$$(3)\qquad \begin{cases} (\cos^2\omega - \sin^2\omega)(ll' + mm' + nn') \\ \quad + \sin\omega\cos\omega(l'^2 + m'^2 + n'^2 - l^2 - m^2 - n^2) = 0. \end{cases}$$

Cette équation (3), analogue à celle qui donne les directions des axes d'une conique, détermine en général un système rectangulaire $x'y'$ et un seul. C'est ce qui a lieu si les quantités

$$ll' + mm' + nn', \qquad l^2 + m^2 + n^2 - l'^2 - m'^2 - n'^2$$

ne sont pas nulles en même temps, et c'est ce que nous supposerons pour le moment.

aa' et bb' étant ainsi déterminés, en appelant P la force du couple aa' qui est appliquée en a, Q celle du couple bb' qui est appliquée en b, nous pouvons supposer que les trois directions P, Q, R forment un trièdre trirectangle satisfaisant aux conventions ordinaires. Transportons les couples parallèlement à eux-mêmes, de façon que a' et b' viennent en C, point d'application de R; nous aurons un triangle rectangle ACB invariable dans le solide et qui le détermine complètement, et toutes les forces du système pourront être remplacées par R appliquée en C et les deux couples (CA, P) (CB, Q).

Au lieu de donner au corps des orientations diverses, nous pouvons supposer qu'il demeure fixe et que les forces tournent convenablement autour de leurs points d'application. Supposons les forces R, P, P', Q, Q' amenées dans une position telle que, P, Q, R étant demeurées rectangulaires, le système ait une résultante unique et cherchons la position de cette résultante dans le corps. Pour cela, prenons pour origine C, CA et CB pour axes des x et des y, et pour axe des z la perpendiculaire au plan ACB choisie de telle sorte que le trièdre Cxyz soit superposable au trièdre formé par les directions de P, Q et R.

Soient $CA = a$, $CB = b$; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs des trois directions P, Q, R; x, y, z les coordonnées d'un point de la résultante; X, Y, Z les composantes d'une force égale et directement opposée à cette résultante. Si nous écrivons que les six forces sont en équilibre, nous aurons les équations

$$(4)\quad \begin{cases} X + R\alpha'' = 0, \\ Y + R\beta'' = 0, \\ Z + R\gamma'' = 0, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} yZ - zY + bQ\gamma' = 0, \\ zX - xZ - aP\gamma = 0, \\ xY - yX + aP\beta - bQ\alpha' = 0. \end{cases}$$

La condition pour que la résultante existe est par suite

$$bQ(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') - aP(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') = 0,$$

ou, en tenant compte des relations connues entre les neuf cosinus,

$$(6)\qquad bQ\beta - aP\alpha' = 0.$$

Cette équation (6) étant satisfaite, les équations (5) se réduisent à deux qui sont les équations de la résultante, X, Y, Z étant remplacées par leurs valeurs tirées de (4). Soient ξ et ζ, η' et ζ' les coordonnées des points où la résultante rencontre respectivement les plans zx et zy. Nous aurons, pour les déterminer, les deux systèmes d'équations

$$(7)\quad \begin{cases} R\beta''\zeta + bQ\gamma' = 0, \\ R\beta''\xi - aP\beta + bQ\alpha' = 0; \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} R\alpha''\zeta' + aP\gamma = 0, \\ R\alpha''\eta' + aP\beta - bQ\alpha' = 0. \end{cases}$$

Or, si nous considérons les deux groupes d'équations

$$(9)\quad \begin{cases} \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \end{cases}$$

nous en déduisons les deux suivantes :

$$(11) \qquad \alpha'^2+\gamma'^2=\beta^2+\beta''^2,$$

$$(12) \qquad \beta^2+\gamma^2=\alpha^2+\alpha''^2.$$

Entre les quatre équations homogènes (6), (7) et (11) nous pouvons éliminer β, α', γ' et β''; de même entre (6), (8) et (12) nous pouvons éliminer β, α', γ et α''; il existe donc une relation entre ξ et ζ, de même que entre η' et ζ', c'est-à-dire que les points de rencontre de la résultante avec les plans zx et zy décrivent deux courbes déterminées. Les équations de ces courbes s'obtiennent immédiatement et sont les suivantes :

$$\frac{\zeta^2}{b^2Q^2}-\frac{\xi^2}{a^2P^2-b^2Q^2}=\frac{1}{R^2},$$

$$\frac{\zeta'^2}{a^2P^2}+\frac{\eta'^2}{a^2P^2-b^2Q^2}=\frac{1}{R^2}.$$

Ce sont deux coniques ayant pour centre le point C, l'axe Cz pour axe focal ; l'une est une ellipse, l'autre une hyperbole, les sommets de l'une sont les foyers de l'autre et réciproquement. C'est le théorème de Minding.

Ceci suppose que $a^2P^2-b^2Q^2$ n'est pas nul. Or la réduction des forces parallèles montre immédiatement que

$$a^2P^2=(\Sigma Xx)^2+(\Sigma Xy)^2+(\Sigma Xz)^2,$$
$$b^2Q^2=(\Sigma Yx)^2+(\Sigma Yy)^2+(\Sigma Yz)^2,$$

et comme, par hypothèse,

$$\Sigma Xx\,\Sigma Yx+\Sigma Xy\,\Sigma Yy+\Sigma Xz\,\Sigma Yz=0,$$

on voit que, si l'on avait en même temps $a^2P^2=b^2Q^2$, on serait dans le cas où l'équation (3) donne une infinité de systèmes de directions rectangulaires. Dans ce cas, on voit que la résultante est assujettie à rencontrer seulement une droite, l'axe Cz.