NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. FARJON

Solution d'une question proposée pour l'admission à l'École normale en 1885

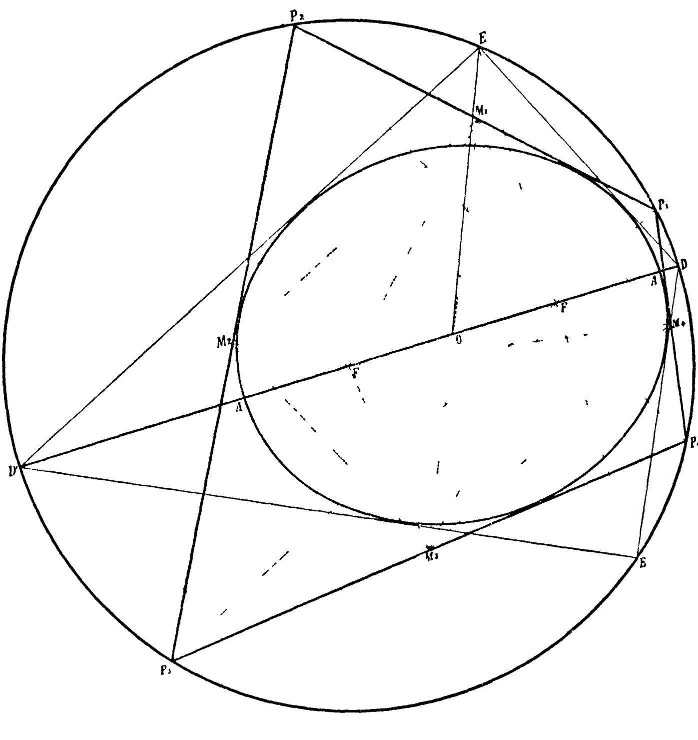
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 348-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__348_0>

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1885;

PAR M. F. FARJON, à Boulogne-sur-Mer.

Du foyer F' *d'une ellipse comme centre on décrit un cercle : d'un point* P_1 *de ce cercle on mène la tangente* P_1P_2 *à la courbe, puis la tangente* P_2P_3, *puis la tangente* P_3P_4, *et il s'agit de déterminer le rayon du cercle de telle sorte que* P_4P_1 *soit aussi tangente.*



Abaissons les perpendiculaires $F'M_1$, $F'M_2$, $F'M_3$, $F'M_4$, le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme, puisque ses sommets sont les milieux des côtés de $P_1P_2P_3P_4$, et il est inscriptible : c'est donc un rectangle, d'où il suit que les diagonales du quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$ sont rectangulaires et que le centre O est le milieu de M_1M_3.

On sait que, si un quadrilatère inscriptible a ses diagonales rectangulaires, la droite qui joint le milieu de l'un des côtés au point de concours des diagonales est perpendiculaire sur le côté opposé [1]. Il en résulte que, F désignant le point de concours des diagonales de $P_1P_2P_3P_4$, FM_1 est parallèle à $F'M_3$, et FM_3 parallèle à $F'M_1$; $F'M_1FM_3$ est donc un parallélogramme et le point F, symétrique de F' par rapport à O, est le second foyer de l'ellipse.

Ainsi, tous les quadrilatères, à la fois inscrits dans le cercle F' et circonscrits à l'ellipse, ont leurs diagonales rectangulaires et se coupant au foyer F. Remarquons, en passant, que tous ces quadrilatères ont leur centre de gravité en O.

Cela posé, considérons en particulier le quadrilatère qui a l'un de ses sommets au point D' où le grand axe prolongé rencontre le cercle, F étant le point de concours des diagonales, le sommet opposé sera en D' à l'autre extrémité du diamètre D'F, et les deux autres sommets sur la perpendiculaire FE à ce diamètre. Menons OE, et soit R le rayon cherché ; on a

$$\overline{OE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FO}^2,$$

---

[1] Ce théorème, d'après Chasles, est dû au géomètre indien Brahmegupta, qui vivait au VI^e siècle de notre ère (*Aperçu hist.*, Note XII).

l'angle circonscrit D′ED étant droit

$$\overline{\mathrm{OE}}^2 = a^2 + b^2;$$

l'égalité précédente peut donc s'écrire

$$a^2 + b^2 = (\mathrm{R} + 2c)(\mathrm{R} - 2c) + c^2,$$

d'où

$$\mathrm{R}^2 = 2(a^2 + c^2).$$

Note. — Solution identique par M. Théodule Caronnet; solution analytique par M. Juhel-Rénoy.