Nouvelles annales de mathématiques

Paul Payet

Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École centrale en 1887

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 325-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__325_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1887;

Par M. Paul PAYET,
Élève du Collège Stanislas.

On considère toutes les coniques qui ont un foyer en un point donné F *et qui passent par deux points donnés* A *et* B :

1° *Montrer que ces coniques forment deux séries telles que pour toute conique d'une série la directrice* *correspondant au foyer* F *passe par un point fixe de la droite* AB, *situé entre* A *et* B; *tandis que, pour toute conique de l'autre série, la directrice correspondant au foyer* F *passe par un point fixe de la droite* AB, *non situé entre* A *et* B.

2° *Trouver le lieu des centres de ces coniques et montrer qu'il se compose de deux coniques homofocales.*

3° *Prenant un point* C *sur le lieu précédent, reconnaître, d'après la position qu'il occupe sur ce lieu, si la conique considérée dont le point* C *est centre est telle que les points* A *et* B *soient sur une même branche ou sur deux branches différentes de cette conique.*

4° *Si le point* C *est tel que les points* A *et* B *sont sur une même branche de la conique considérée, reconnaître, d'après la position du point* C, *si cette conique est du genre ellipse ou du genre hyperbole, et, dans ce dernier cas, si les points* A *et* B *sont sur la branche voisine de* F *ou sur l'autre.*

1° Considérons le foyer F et les deux points A et B donnés: joignons FA et FB et menons les bissectrices des angles en F : l'une rencontre AB en M situé entre A et B, et l'autre en N situé en dehors de AB.

Or on sait que, si d'un point situé hors d'une conique on mène les tangentes à cette courbe, le point où la directrice correspondant à l'un des foyers rencontre la corde des contacts appartient à la bissectrice de l'angle sous lequel on voit du foyer la distance des points de contact, si ces points sont sur des branches différentes, et à la bissectrice de l'angle extérieur si ces points sont sur une même branche.

D'après cela, comme AB, FM et FN sont fixes, le point M est un point fixe commun à toutes les directrices correspondant au foyer F des coniques pour lesquelles A et B sont sur des branches différentes, et le point N est un point fixe commun à toutes les directrices des coniques pour lesquelles A et B sont sur une même branche.

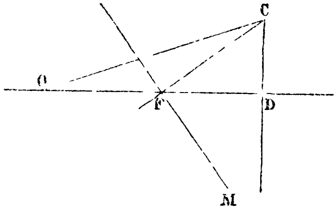
La première partie de l'énoncé se trouve ainsi démontrée.

2° Pour construire un centre quelconque et trouver le lieu de ce point, on pourrait appliquer le théorème déjà cité; mais on peut arriver plus simplement au résultat en s'appuyant sur la propriété suivante :

Dans une conique, le diamètre conjugué d'une direction de cordes et la perpendiculaire abaissée d'un foyer sur ces cordes concourent sur la directrice correspondant au foyer considéré (¹).

Considérons alors (*fig.* 1) une direction quelconque MH

(¹) En effet, soient FM une corde et FC la perpendiculaire menée par le foyer F. Ces deux droites étant rectangulaires et passant par le foyer, FC contient le pôle de FM. Ce pôle est aussi sur le diamètre

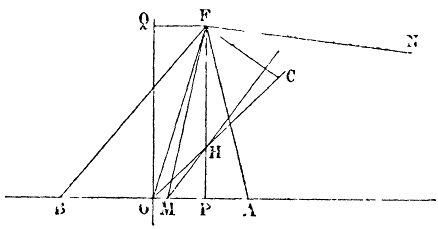


conjugué OC de FM; il est enfin sur la directrice CD, car FM passe par le foyer F.

Donc OC et FC concourent sur la directrice correspondant à F.

passant par M (A et B sont sur des branches différentes). Le centre se trouve d'abord sur l'axe FC mené par F perpendiculairement à la directrice, il se trouve ensuite sur le diamètre conjugué de AB, qu'on obtient en joignant, d'après la propriété citée, le milieu O de AB au point H où la directrice MH rencontre la perpendicu-

Fig. 1.

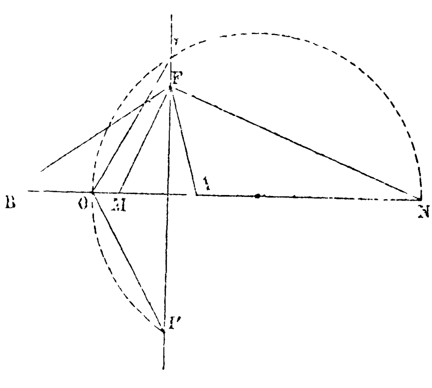


laire FP à AB. Le centre est donc le point C. Or ce point se trouve constamment sur les droites FC et OC qui pivotent autour des points fixes O et F. Ces droites forment deux faisceaux homographiques, car à toute droite de l'un des faisceaux correspond une et une seule droite de l'autre, et réciproquement.

Le lieu du centre des coniques dont la directrice passe en M est donc une conique passant en F et O. De plus, si nous plaçons MH suivant AB, le point C vient en P, et si MH devient perpendiculaire à AB, C se confond avec Q. La conique est donc circonscrite au rectangle OPFQ, et son centre est le centre D du rectangle. Si MH se place suivant MF, C vient en F, FC se place suivant FN, seconde bissectrice, et FC, coupant la conique en deux points confondus en F, est tangente en ce point; des raisons de symétrie nous donnent les tangentes en O, P et Q. Cette conique est une ellipse; car, pour qu'elle eût des points à l'infini, il faudrait que FC et OC pussent devenir parallèles ou OC devenir perpendiculaire à MH. Or P, M et O étant les pieds de la hauteur, de la bissectrice intérieure et de la médiane issues de F, M, pied de la bissectrice, se trouve entre M et O. Par suite, H étant toujours à l'extérieur du cercle décrit sur MO comme diamètre, l'angle MHO n'est jamais droit, et la conique n'ayant pas de points à l'infini est une ellipse.

On prouverait d'une manière identique que le lieu du centre des coniques dont la directrice passe en N est une conique circonscrite au rectangle OPFQ, sa tangente en F est la première bissectrice FM; la symétrie nous donne les trois autres tangentes. Les deux coniques composant le lieu des centres sont donc circonscrites au même rectangle et orthogonales aux sommets de ce rectangle, car les bissectrices FM et FN sont rectangulaires. Par suite, d'après une propriété connue, les deux coniques sont homofocales, et, l'une étant une ellipse, l'autre sera une hyperbole.

Fig. 2.



Nous pouvons d'ailleurs trouver directement les asymptotes de cette hyperbole. En effet, dans ce cas, le point P, pied de la hauteur, est forcément entre O et N : l'angle OHN sera donc droit lorsque H viendra aux point I et I' où FP coupe le cercle décrit sur ON comme diamètre. Les directions asymptotiques sont alors OI et OI', et, comme le centre est en D, nous avons les asymptotes en position.

3° D'après la génération même du lieu, nous voyons que l'ellipse est le lieu des centres des coniques pour lesquelles A et B sont sur des branches différentes, c'est donc un lieu de centres d'hyperboles.

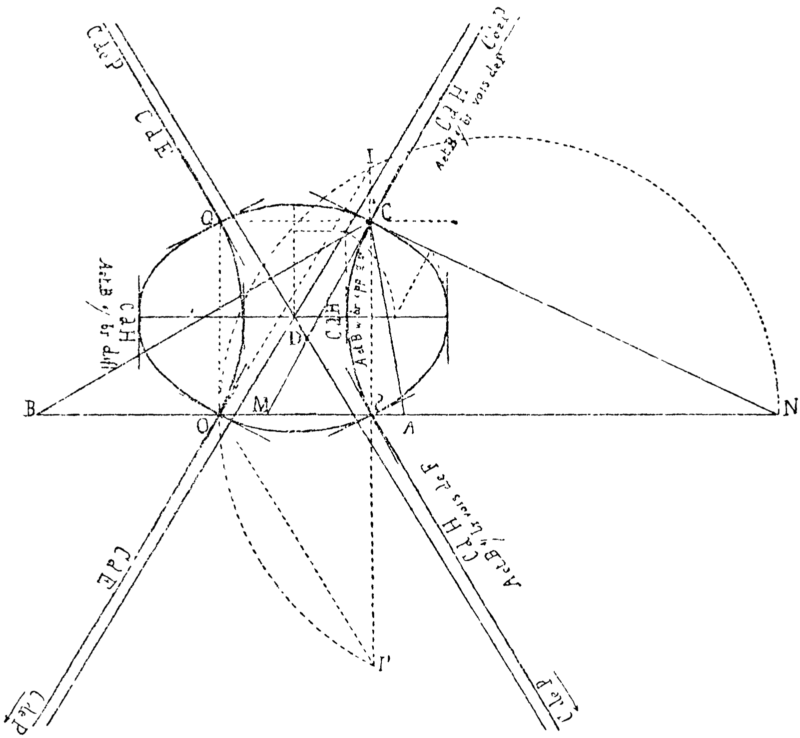
L'hyperbole est au contraire le lieu des centres des coniques pour lesquelles A et B sont sur une même branche; il peut y avoir des centres d'ellipses ou d'hyperboles : nous allons les séparer.

4° Nous savons que, dans tout lieu de centres, les centres de paraboles séparent les centres d'ellipses des centres d'hyperboles. Or, dans notre question, il n'y a que deux paraboles, toutes deux véritables, répondant aux données, et il y en a une dans chaque série de coniques. Leurs centres se trouvent à l'infini sur les branches de l'hyperbole; l'une des branches se compose donc de centres d'ellipses, l'autre de centres d'hyperboles, et, comme le point F est le centre de l'hyperbole réduite aux deux droites FA et FB, la branche de gauche est formée des centres d'ellipses, la branche de droite des centres d'hyperboles.

Voyons maintenant dans quel cas, pour les centres d'hyperboles, A et B sont sur la branche voisine de F ou sur la branche opposée.

Pour que A et B soient sur la branche opposée à F, il faut que la directrice issue de N laisse d'un côté le foyer F et de l'autre A et B; cette directrice sera donc comprise entre FN et NA, et l'axe qui lui est perpendiculaire sera compris entre FM et FN. Donc les points du lieu situés entre F et P sont les centres pour lesquels A et B sont sur la branche opposée à F.

Fig. 3.



La figure ci-dessus résume les résultats de la discussion.

Note. — La même question a été traitée analytiquement par M. E. Barisien.