Nouvelles annales de mathématiques

# Solution de la question proposée pour l'admission à l'École normale supérieure en 1887

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 7 (1888), p. 295-302

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__295_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

## SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1887;

Par UN ABONNÉ.

Soit P le point du cylindroïde dont les coordonnées sont $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Les équations de la normale en ce point sont

$$\frac{x-\alpha}{\alpha\gamma-m\alpha}=\frac{y-\beta}{\beta\gamma+m\beta}=\frac{z-\gamma}{\alpha^2+\beta^2},$$

et, comme cette normale passe par le point $M(x', y', z')$, on a

$$\frac{x'-\alpha}{\alpha\gamma-m\alpha}=\frac{y'-\beta}{\beta\gamma+m\beta}=\frac{z'-\gamma}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{1}$$

Ces relations, dans lesquelles on peut supposer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ coordonnées courantes, représente une courbe passant par les pieds des normales menées du point M à la surface donnée.

On a, en outre, en remarquant que le point P est sur la surface,

$$\gamma(\alpha^2+\beta^2)-m(\alpha^2-\beta^2)=0. \tag{2}$$

Les pieds des normales demandées s'obtiendraient donc en résolvant les équation (1) et (2) par rapport à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Mais ces équations, vu leur forme compliquée, ne peuvent être résolues par les procédés élémentaires de l'Algèbre.

Nous allons alors nous proposer de former : 1° l'équation qui a pour racines les valeurs du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$; 2° l'équation qui a pour racines les valeurs de $\gamma$.

*Équation en* $\frac{\beta}{\alpha}$. — 1° Les relations (1) donnent, en considérant les deux premiers rapports,

$$\beta\gamma x' - \alpha\beta\gamma + m\beta x' - m\alpha\beta = \alpha\gamma y' - m\alpha y' - \alpha\beta\gamma + m\alpha\beta$$

ou

$$2m\alpha\beta - m(\alpha y' + \beta x') + \gamma(\alpha y' - \beta x') = 0.$$

Divisant tous les termes par $\alpha$ et posant $\frac{\beta}{\alpha} = \mu$, il vient

$$2m\mu\alpha - m(y' + \mu x') + \gamma(y' - \mu x') = 0.$$

D'autre part, la relation (2) donne

$$\gamma(1 + \mu^2) = m(1 - \mu^2)$$

ou

$$\gamma = m\left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}\right).$$

Remplaçant $\gamma$ par sa valeur dans l'égalité précédente et divisant tous les termes par $m$, il vient

$$2\mu\alpha - (y' + \mu x') + \left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}\right)(y' - \mu x') = 0;$$

d'où

$$\alpha = \frac{(1 + \mu^2)(y' + \mu x') - (1 - \mu^2)(y' - \mu x')}{2\mu(1 + \mu^2)}$$

ou, en simplifiant,

$$\alpha = \frac{x' + \mu y'}{1 + \mu^2}.$$

Considérons maintenant le premier et le troisième rapport des relations (1); ils donnent

$$(x' - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = (z' - \gamma)(\alpha\gamma - m\alpha),$$

ou, en divisant tous les termes par $\alpha^2$ et remplaçant $\frac{\beta}{\alpha}$

par $\mu$,

$$(x'-\alpha)(1+\mu^2)=(z'-\gamma)\,\frac{\gamma-m}{\alpha}.$$

Si, dans cette égalité, nous remplaçons les quantités $\alpha$ et $\gamma$ par leurs valeurs trouvées tout à l'heure, nous aurons une équation qui ne contiendra plus que $\mu$ comme inconnue et qui ne sera autre chose que l'équation demandée. On obtient ainsi

$$(1+\mu^2)(x'+\mu y')(\mu x'-y')+2m\mu[z'-m+\mu^2(z'+m)]=0$$

ou, en effectuant les calculs et ordonnant par rapport à $\mu$,

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu^4 x'y'+\mu^3[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]\\ &\quad+\mu[x'^2-y'^2+2m(z'-m)]-x'y'=0. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation du quatrième degré qui donne les valeurs du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$.

*Équation en* $\gamma$. — Pour avoir l'équation en $\gamma$, il n'y a qu'à remplacer dans l'équation précédente la quantité $\mu$ par sa valeur en fonction de $\gamma$.

Or, de la relation $\gamma=m\left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right)$, on tire

$$\mu=\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}};$$

on a donc, en remplaçant $\mu$ par sa valeur dans l'équation (I),

$$\left(\frac{m-\gamma}{m+\gamma}\right)^2 x'y'+\frac{m-\gamma}{m+\gamma}\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}\,[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]$$
$$+\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}\,[x'^2-y'^2+2m(z'-m)]-x'y'=0.$$

Faisant passer les termes rationnels dans le second membre et les termes irrationnels dans le premier, il vient

$$(m^2-\gamma^2)\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]$$
$$+(m+\gamma)^2\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}\;[x'^2-y'^2+2(z'-m)]=4m\gamma x'y'$$

ou, en mettant $(m+\gamma)\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}$ en facteur dans le premier membre,

$$(m+\gamma)\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}\Big\{(m-\gamma)[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]$$
$$+(m+\gamma)[x'^2-y'^2+2m(z'-m)]\Big\}=4m\gamma x'y',$$

ou encore, en effectuant entre crochets et divisant par $2m$,

$$\sqrt{m^2-\gamma^2}[x'^2-y'^2+2m(z'-y)]=2\gamma x'y',$$

ou enfin, en élevant au carré et ordonnant par rapport à $\gamma$,

$$\text{(II)}\quad\left\{\begin{array}{l}4m^2\gamma^4-4m(x'^2-y'^2+2mz')\gamma^3\\ \quad+[(x'^2-y'^2+2mz')^2+4x'^2y'^2-4m^4]\gamma^2\\ \quad+4m^3(x'^2-y'^2+2mz')\gamma-m^2(x'^2-y'^2+2mz')^2=0.\end{array}\right.$$

C'est la seconde équation demandée.

Si l'on savait résoudre les équations (I) et (II), on déduirait facilement des racines de ces équations les valeurs des coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. En effet, si l'on connaissait $\mu$, par exemple, les coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ seraient données par les formules

$$\alpha=\frac{x'+\mu y'}{1+\mu^2},\qquad \beta=\frac{\mu(x'+\mu y')}{1+\mu^2},\qquad \gamma=m\left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right).$$

De même, si l'on connaissait $\gamma$, on aurait $\mu$ par la formule

$$\mu=\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}},$$

et l'on en déduirait $\alpha$ et $\beta$.

2° Pour que l'équation (I) soit réciproque, il faut que les coefficients de deux termes quelconques situés à égale distance des extrêmes soient égaux et de signes contraires, c'est-à-dire que l'on ait

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' + m) + x'^2 - y'^2 + 2m(z' - m) = 0$$

ou

$$x'^2 - y'^2 + 2mz' = 0,$$

équation qui exprime que le point M doit se trouver sur un *paraboloïde hyperbolique* ayant pour plans principaux le plan des $xz$ et le plan des $yz$.

Supposons cette condition remplie et cherchons les coordonnées des pieds des normales menées du point M au cylindroïde. L'équation (I) prend la forme

$$\mu^4 x'y' + 2m^2\mu^3 - 2m^2\mu - x'y' = 0,$$

ou, en groupant les termes et mettant $(\mu^2 - 1)$ en facteur commun,

$$(\mu^2 - 1)(\mu^2 x'y' + 2m^2\mu + x'y') = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\mu^2 - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu^2 x'y' + 2m^2\mu + x'y' = 0.$$

La première équation donne

$$\mu' = 1 \qquad \text{et} \qquad \mu'' = -1,$$

et la seconde

$$\mu''' = \frac{-m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2}}{x'y'}$$

et

$$\mu^{\text{IV}} = \frac{-m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2 y'^2}}{x'y'}.$$

Connaissant les valeurs de $\mu$, on trouve facilement celles de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, qui sont

$$\alpha' = \frac{x'+y'}{2}, \qquad \beta' = \frac{x'+y'}{2}, \qquad \gamma' = 0,$$

$$\alpha'' = \frac{x'-y'}{2}, \qquad \beta'' = -\frac{x'-y'}{2}, \qquad \gamma'' = 0.$$

$$\alpha''' = \frac{x'y'^2\left(x'^2 - m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)}{2m^2\left(m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)},$$

$$\beta''' = -\frac{y'\left(x'^2 - m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)}{2m^2},$$

$$\gamma''' = \frac{\sqrt{m^4 - x'^2y'^2}}{m},$$

$$\alpha^{\text{IV}} = \frac{x'y'^2\left(x'^2 - m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)}{2m^2\left(m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)},$$

$$\beta^{\text{IV}} = -\frac{y'\left(x'^2 - m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)}{2m^2},$$

$$\gamma^{\text{IV}} = -\frac{\sqrt{m^4 - x'^2y'^2}}{m}.$$

3° Supposons que l'équation (II) ait une racine double égale à $z'$. Les relations entre les coefficients et les racines sont alors

$$\gamma' + \gamma'' + 2z' = \frac{x'^2 - y'^2 + 2mz'}{m},$$

$$\gamma'\gamma'' + (\gamma' + \gamma'')z' + z'^2 = \frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2 + 4x'^2y'^2 - 4m^4}{4m^2},$$

$$2\gamma'\gamma''z' + (\gamma' + \gamma'')z'^2 = -m(x'^2 - y'^2 + 2mz'),$$

$$\gamma'\gamma''z'^2 = -\frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2}{4}.$$

De la première et de la quatrième, on tire

$$\gamma' + \gamma' = \frac{x'^2 - y'^2}{m},$$

$$\gamma'\gamma'' = -\frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2}{4z'^2},$$

et, en portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$\frac{(x'^2-y'^2)z'^2}{m}-\frac{(x'^2-y'^2+2mz')^2}{2z'}=-m(x'^2-y'^2+2mz'),$$

ou, en chassant les dénominateurs et simplifiant,

$$2(x'^2-y'^2)z'^3-m(x'^2-y'^2+2mz')(x'^2-y'^2)=0,$$

équation qui se décompose en

$$x'^2-y'^2=0 \qquad \text{et} \qquad 2z'^3-m(x'^2-y'^2+2mz')=0.$$

La première équation représente les plans bissecteurs des angles dièdres $xozy$ et $xozy'$, et la seconde une surface du troisième degré rencontrant chacun des plans $z=0$, $z=m$ et $z=-m$ suivant deux droites situées dans les plans bissecteurs dont nous venons de parler.

Supposons le point M situé sur l'une des deux surfaces précédentes. L'équation (II) admet alors la racine double $z'$ et les deux autres racines satisfont aux relations

$$\gamma'+\gamma''=\frac{x'^2-y'^2}{m} \qquad \text{et} \qquad \gamma'\gamma''=-\frac{(x'^2-y'^2+2mz')^2}{4z'^2}.$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$\frac{(x'^2-y'^2)^2}{m^2}+\frac{(x'^2-y'^2+2mz')^2}{z'^2}>0,$$

condition qui est toujours satisfaite, puisque le premier membre est une somme de deux carrés.

4° Pour savoir ce que représente l'équation (II) quand on y regarde $\gamma$ comme une constante et $x'$, $y'$, $z'$ comme les coordonnées d'un point variable, nous n'avons qu'à ordonner cette équation par rapport à

$$(x'^2-y'^2+2mz')$$

et à résoudre l'équation du second degré obtenue. On a ainsi

$$\begin{aligned}&(\gamma^2 - m^2)(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2\\ &\quad - 4m\gamma(\gamma^2 - m^2)(x'^2 - y'^2 + 2mz')\\ &\qquad + 4m^2\gamma^2(\gamma^2 - m^2) + 4\gamma^2 x'^2 y'^2 = 0;\end{aligned}$$

d'où

$$x'^2 - y'^2 + 2mz' = \frac{2m\gamma(\gamma^2 - m^2) \pm 2\gamma x'y'\sqrt{\gamma^2 - m^2}}{\gamma^2 - m^2},$$

ou, en séparant les racines et simplifiant,

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' - \gamma) + \frac{2\gamma x'y'}{\sqrt{\gamma^2 - m^2}} = 0,$$

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' - \gamma) - \frac{2\gamma x'y'}{\sqrt{\gamma^2 - m^2}} = 0,$$

équations qui représentent deux *paraboloïdes hyperboliques*.

La même question a été résolue, d'une manière analogue, par M. Clapier, étudiant à la Faculté des Sciences de Montpellier, et par M. Barisien.